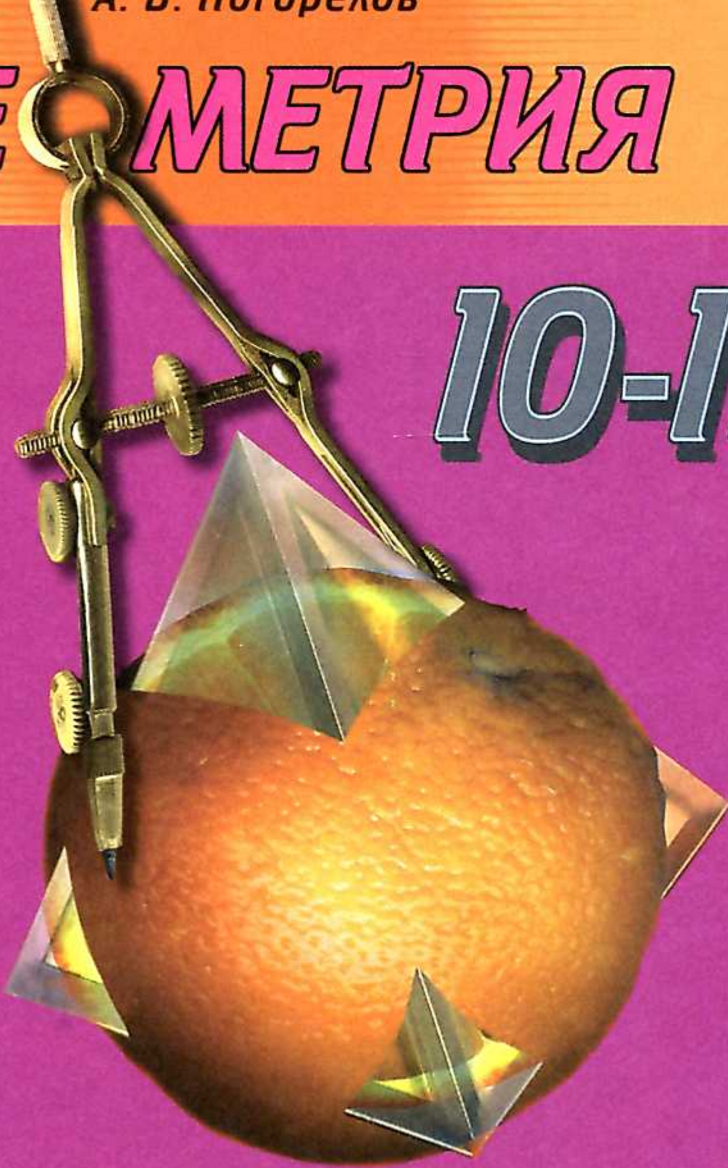
А. В. Погорелов

ГЕОМЕТРИЯ

10-11



ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

А. В. Погорелов

ГЕОМЕТРИЯ

10–11 классы

Учебник
для общеобразовательных
организаций

Базовый и профильный уровни

Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации

13-е издание

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
2014

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
П43

На учебник получены положительные заключения Российской академии наук (№ 101106-5215/1415 от 25.10.06) и Российской академии образования (№ 01-168/5/7д от 14.07.06)

Погорелов А. В.
П43 Геометрия. 10—11 классы : учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и профил. уровни / А. В. Погорелов. — 13-е изд. — М. : Просвещение, 2014. — 175 с. : ил. — ISBN 978-5-09-032026-9.

Учебник представляет систематический курс стереометрии, изложенный на высоком научном уровне. В учебнике в отдельный параграф вынесены вопросы планиметрии, предусмотренные программой старшей школы. Стиль изложения материала чёткий и немногословный, что позволяет учащимся пользоваться этим учебником как справочником при подготовке к ЕГЭ.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72

ISBN 978-5-09-032026-9

10 класс

§ 1 Аксиомы стереометрии и их простейшие следствия

1. Аксиомы стереометрии

Стереометрия — это раздел геометрии, в котором изучаются фигуры в пространстве. В стереометрии, так же как и в планиметрии, свойства геометрических фигур устанавливаются путем доказательства соответствующих теорем. При этом отправными являются свойства основных геометрических фигур, выражаемые аксиомами. *Основными фигурами* в пространстве являются *точка, прямая* и *плоскость.*

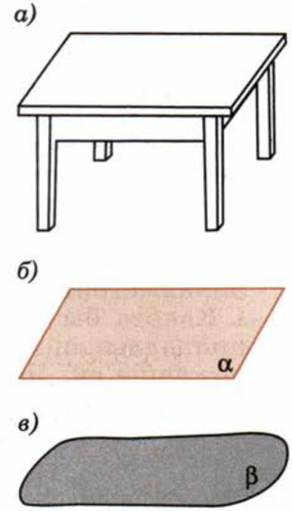


Рис. 1

Плоскость мы представляем себе как ровную поверхность крышки стола (рис. 1, *а*). Изображать плоскость будем в виде параллелограмма или в виде произвольной области (рис. 1, *б*, *в*). Плоскость, как и прямая, бесконечна. На рисунке мы изображаем только часть плоскости, но представляем ее неограниченно продолженной во все стороны. Плоскости обозначаются греческими буквами α, β, γ, ...

Введение нового геометрического образа — плоскости заставляет расширить систему аксиом. Поэтому мы вводим группу аксиом, которая выражает основные свойства плоскостей в пространстве. Эта группа состоит из следующих трех аксиом:

Аксиома C_1

Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.

Аксиома

C_2

Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

Этой аксиомой утверждается, что если две различные плоскости α и β имеют общую точку, то существует прямая c, принадлежащая каждой из этих плоскостей. При этом если точка C принадлежит обеим плоскостям, то она принадлежит прямой c.

Аксиома

C_3

Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.

Это значит, что если две различные прямые a и b имеют общую точку C, то существует плоскость γ, содержащая прямые a и b. Плоскость, обладающая этим свойством, единственна.

Таким образом, система аксиом стереометрии состоит из аксиом I—IX планиметрии и трех аксиом стереометрии. Напомним аксиомы планиметрии:

I. Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей. Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

II. Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

III. Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.

IV. Прямая, *принадлежащая плоскости*, разбивает эту плоскость на две полуплоскости.

V. Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Развернутый угол равен 180°. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

VI. На любой полупрямой от ее начальной точки можно отложить отрезок заданной длины, и только один.

VII. От полупрямой *на содержащей ее плоскости* в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180°, и только один.

VIII. Каков бы ни был треугольник, существует равный ему треугольник *в данной плоскости* в заданном расположении относительно данной полупрямой в этой плоскости.

IX. *На плоскости* через данную точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

Замечание. В планиметрии мы имели одну плоскость, на которой располагались все рассматриваемые нами фигуры. В стереометрии много, даже бесконечно много, плоскостей. В связи с этим формулировки некоторых аксиом планиметрии как аксиом стереометрии требуют уточнения. Это относится к аксиомам IV, VII, VIII, IX.

2. Существование плоскости, проходящей через данную прямую и данную точку

Теорема

1.1

Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.

Доказательство.

Пусть AB — данная прямая и C — не лежащая на ней точка (рис. 2). Проведем через точки A и C прямую (аксиома I). Прямые AB и AC различны, так как точка C не лежит на прямой AB. Проведем через прямые AB и AC плоскость α (аксиома C_3). Она проходит через прямую AB и точку C.

Докажем, что плоскость α, проходящая через прямую AB и точку C, единственна. Допустим, существует другая плоскость α', проходящая через прямую AB и точку C. По аксиоме C_2 плоскости α и α' пересекаются по прямой. Эта прямая должна содержать точки A, B, C. Но они не лежат на одной прямой. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

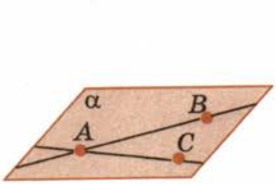


Рис. 2

Задача (7)[1].

Докажите, что через прямую можно провести две различные плоскости.

Решение.

Пусть a — данная прямая (рис. 3). По аксиоме I существует точка A, не лежащая на прямой a. По теореме 1.1 через прямую a и точку A можно провести плоскость, обозначим ее α_1. По аксиоме C_1 существует точка B, не лежащая в плоскости α_1. Проведем через прямую a и точку B плоскость α_2. Плоскости α_1 и α_2 различны, так как точка B плоскости α_2 не лежит на плоскости α_1.

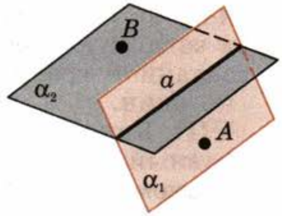


Рис. 3

3. Пересечение прямой с плоскостью

Теорема

1.2

Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.

Доказательство.

Пусть a — данная прямая и α_1 — данная плоскость (рис. 4). По аксиоме I существует точка A, не лежащая на прямой a. Проведем через прямую a и точку A плоскость α_2. Если плоскость α_2 совпадает с плоскостью α_1, то плоскость α_1 содержит прямую a, что и утверждается теоремой. Если плоскость α_2 отлична от плоскости α_1, то эти плоскости пересекаются по прямой a', со-

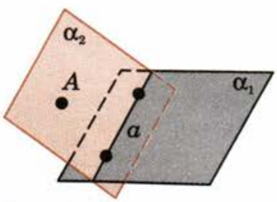


Рис. 4

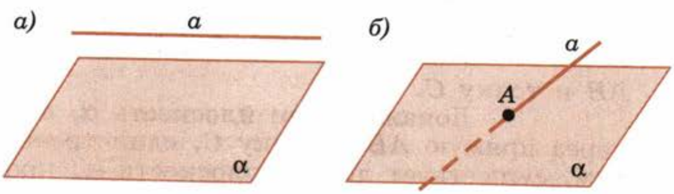


Рис. 5

[1] Число в скобках указывает номер задачи в списке задач, приведенных в конце параграфа.

держащей две точки прямой a. По аксиоме I прямая a' совпадает с a, и, следовательно, прямая a лежит в плоскости α_1. Теорема доказана.

Из теоремы 1.2 следует, что

плоскость и не лежащая на ней прямая либо не пересекаются, либо пересекаются в одной точке (рис. 5).

Задача (9).

Даны две различные прямые, пересекающиеся в точке A. Докажите, что все прямые, пересекающие обе данные прямые и не проходящие через точку A, лежат в одной плоскости.

Решение.

Проведем через данные прямые a и b плоскость α (рис. 6). Это можно сделать по аксиоме C_3. Прямая c, пересекающая данные прямые, имеет с плоскостью α две общие точки M и N (точки пересечения с данными прямыми). По теореме 1.2 эта прямая должна лежать в плоскости α.

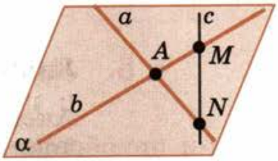


Рис. 6

4. Существование плоскости, проходящей через три данные точки

Теорема

1.3

Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

Доказательство.

Пусть A, B, C — три данные точки, не лежащие на одной прямой (рис. 7). Проведем прямые AB и AC; они различны, так как точки A, B, C не лежат на одной прямой. По аксиоме C_3 через прямые AB и AC можно провести плоскость α. Эта плоскость содержит точки A, B, C. Докажем, что плоскость α, проходящая через точки A, B, C, единственна. Действительно, плоскость, проходящая через точки A, B, C, по теореме 1.2 содержит прямые AB и AC. А по аксиоме C_3 такая плоскость единственна.

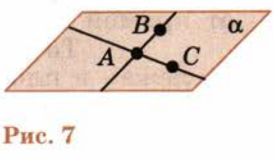


Рис. 7

Задача (13).

Можно ли провести плоскость через три точки, если эти точки лежат на одной прямой? Объясните ответ.

Решение.

Пусть A, B, C — три точки, лежащие на прямой a. Возьмем точку D, не лежащую на прямой a (аксиома I). Через точки A, B, D можно провести плоскость (теорема 1.3). Эта плоскость содержит две точки прямой a — точки A и B, а значит, содержит и точку C этой прямой (теорема 1.2). Следовательно, через три точки, лежащие на одной прямой, всегда можно провести плоскость.

5. Замечание к аксиоме I

Аксиома I в списке аксиом стереометрии приобретает новый смысл по сравнению с тем, который она имела в планиметрии. В планиметрии эта аксиома утверждает существование точек вне данной прямой *на плоскости,* в которой лежит прямая. Именно в таком смысле эта аксиома применялась нами при построении геометрии на плоскости.

Теперь эта аксиома утверждает вообще существование точек, не лежащих на данной прямой. Из нее непосредственно не следует, что существуют точки вне данной прямой на плоскости, в которой лежит прямая. Это требует специального доказательства.

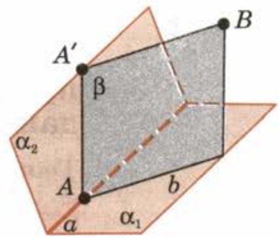


Рис. 8

Дадим такое доказательство.

Пусть α_1 — плоскость и a — прямая в этой плоскости (рис. 8). Докажем существование точек в плоскости α_1, не лежащих на прямой a.

Отметим точку A на прямой a и точку A' вне плоскости α_1. Проведем плоскость α_2 через прямую a и точку A'. Возьмем точку B вне плоскости α_2 и проведем через прямую AA' и точку B плоскость β. Плоскости α_1 и β пересекаются по прямой b, проходящей через точку A и отличной от прямой a.

Точки этой прямой, отличные от точки A, лежат в плоскости α_1 вне прямой a, что и требовалось доказать.

6. Разбиение пространства плоскостью на два полупространства

Теорема

1.4

Плоскость разбивает пространство на два полупространства. Если точки X и Y принадлежат одному полупространству, то отрезок XY не пересекает плоскость. Если же точки X и Y принадлежат разным полупространствам, то отрезок XY пересекает плоскость.

Доказательство (не для запоминания).

Пусть α_1 — данная плоскость. Отметим точку A, не лежащую в плоскости α_1. Такая точка существует по аксиоме C_1. Разобьем все точки пространства, не лежащие в плоскости α_1, на два полупространства следующим образом. Точку X отнесем к первому полупространству, если отрезок AX не пересекает плоскость α_1, и ко второму полупространству, если отрезок AX пересекает плоскость α_1. Покажем, что это разбиение пространства обладает свойствами, указанными в теореме.

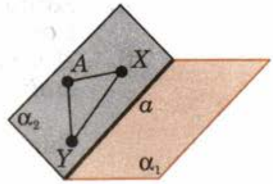


Рис. 9

Пусть точки X и Y принадлежат первому полупространству. Проведем через точки A, X и Y плоскость α_2. Если плоскость α_2 не пересекает плоскость α_1, то отрезок XY тоже не пересекает эту плоскость. Допустим, что плоскость α_2 пересекает плоскость α_1 (рис. 9). Так как плоскости различны, то их пересечение происходит по некоторой прямой a. Прямая a разбивает плоскость α_2 на две полуплоскости. Точки X и Y принадлежат одной полуплоскости, именно той, в которой лежит точка A. Поэтому отрезок XY не пересекает прямую a, а значит, и плоскость α_1.

Если точки X и Y принадлежат второму полупространству, то плоскость α_2 заведомо пересекает плоскость α_1, так как отрезок AX пересекает плоскость α_1. Точки X и Y принадлежат одной полуплоскости разбиения плоскости α_2 прямой a. Следовательно, отрезок XY не пересекает прямую a, а значит, и плоскость α_1.

Если, наконец, точка X принадлежит одному полупространству, а точка Y — другому, то плоскость α_2 пересекает плоскость α_1, а точки X и Y лежат в разных полуплоскостях плоскости α_2 относительно прямой a. Поэтому отрезок XY пересекает прямую a, а значит, и плоскость α_1. Теорема доказана.

Контрольные вопросы

1. Что такое стереометрия?
2. Назовите основные фигуры в пространстве.
3. Сформулируйте три аксиомы стереометрии.
4. Докажите, что через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.
5. Докажите, что если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит плоскости.
6. Докажите, что через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

Задачи

Пункт 1

1. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямые AB и CD не пересекаются.
2. Можно ли через точку пересечения двух данных прямых провести третью прямую, не лежащую с ними в одной плоскости? Объясните ответ.
3. Точки A, B, C лежат в каждой из двух различных плоскостей. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой.
4. Даны три различные попарно пересекающиеся плоскости. Докажите, что если две из прямых пересечения этих плоскостей пересекаются, то третья прямая проходит через точку их пересечения (рис. 10).
5. Даны две плоскости, пересекающиеся по прямой a, и прямая b, которая лежит в одной из этих плоскостей и пересекает другую. Докажите, что прямые a и b пересекаются.

Пункт 2

6. Четыре точки не лежат в одной плоскости. Могут ли какие-нибудь три из них лежать на одной прямой? Объясните ответ.
7. Докажите, что через прямую можно провести две различные плоскости.

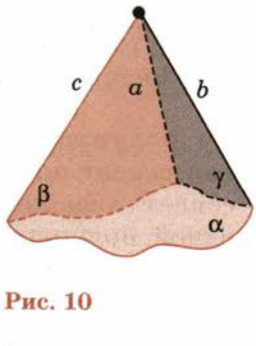


Рис. 10

8[1]. Даны две непересекающиеся плоскости. Докажите, что прямая, пересекающая одну из этих плоскостей, пересекает и другую (рис. 11).

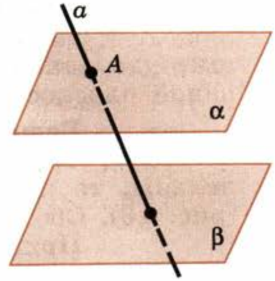


Рис. 11

Пункт 3

9. Даны две различные прямые, пересекающиеся в точке A. Докажите, что все прямые, пересекающие обе данные прямые и не проходящие через точку A, лежат в одной плоскости.

10. Докажите, что все прямые, пересекающие данную прямую и проходящие через данную точку вне прямой, лежат в одной плоскости.

11. Докажите, что если прямые AB и CD не лежат в одной плоскости, то прямые AC и BD также не лежат в одной плоскости.

Пункт 4

12. Даны четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько можно провести различных плоскостей, проходящих через три из этих точек? Объясните ответ.

13. Можно ли провести плоскость через три точки, если эти точки лежат на одной прямой? Объясните ответ.

14. Даны четыре точки. Известно, что прямая, проходящая через любые две из этих точек, не пересекается с прямой, проходящей через другие две точки. Докажите, что данные четыре точки не лежат в одной плоскости.

§ 2 Параллельность прямых и плоскостей

7. Параллельные прямые в пространстве

Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. Прямые, которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости, называются **скрещивающимися** (рис. 12).

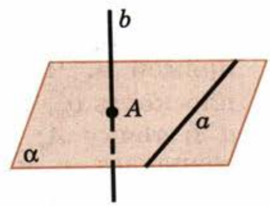


Рис. 12

[1] Цветом отмечены задачи повышенной трудности.

Задача (3).

Докажите, что все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат в одной плоскости.

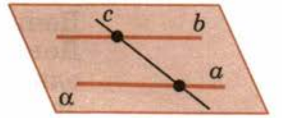


Рис. 13

Решение.

Так как данные прямые a и b параллельны, то через них можно провести плоскость (рис. 13). Обозначим ее α.

Прямая c, пересекающая данные параллельные прямые, имеет с плоскостью α две общие точки — точки пересечения с данными прямыми. По теореме 1.2 эта прямая лежит в плоскости α. Итак, все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат в одной плоскости — плоскости α.

Теорема

2.1

Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.

Замечание.

Утверждение единственности в теореме 2.1 не является простым следствием аксиомы параллельных, так как этой аксиомой утверждается единственность прямой, параллельной данной в данной плоскости. Поэтому теорема требует доказательства.

Доказательство.

Пусть a — данная прямая и A — точка, не лежащая на этой прямой (рис. 14). Проведем через прямую a и точку A плоскость α. Проведем через точку A в плоскости α прямую a_1, параллельную a. Докажем, что прямая a_1, параллельная a, единственна.

Допустим, что существует другая прямая a_2, проходящая через точку A и параллельная прямой a. Через прямые a и a_2 можно провести плоскость α_2. Плоскость α_2 проходит через прямую a и точку A; следовательно, по теореме 1.1 она совпадает с плоскостью α. Теперь по аксиоме параллельных прямые a_1 и a_2 совпадают. Теорема доказана.

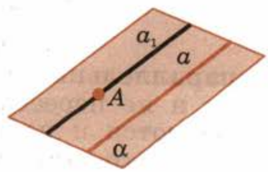


Рис. 14

8. Признак параллельности прямых

Теорема **2.2**

Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.

Доказательство.

Пусть прямые b и c параллельны прямой a. Докажем, что прямые b и c параллельны.

Случай, когда прямые a, b, c лежат в одной плоскости, был рассмотрен в планиметрии. Поэтому предположим, что наши прямые не лежат в одной плоскости. Пусть β — плоскость, в которой лежат прямые a и b, а γ — плоскость, в которой лежат прямые a и c. Плоскости β и γ различны (рис. 15). Отметим на прямой b какую-нибудь точку B и проведем плоскость γ_1 через прямую c и точку B. Она пересечет плоскость β по прямой b_1.

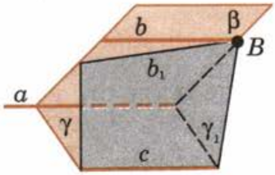


Рис. 15

Прямая b_1 не пересекает плоскость γ. Действительно, точка пересечения должна принадлежать прямой a, так как прямая b_1 лежит в плоскости β. С другой стороны, она должна лежать и на прямой c, так как прямая b_1 лежит в плоскости γ_1. Но прямые a и c как параллельные прямые не пересекаются.

Так как прямая b_1 лежит в плоскости β и не пересекает прямую a, то она параллельна a, а значит, совпадает с b по аксиоме параллельных. Таким образом, прямая b, совпадая с прямой b_1, лежит в одной плоскости с прямой c (в плоскости γ_1) и не пересекает ее. Значит, прямые b и c параллельны. Теорема доказана.

Задача (11).

Докажите, что середины сторон пространственного четырехугольника являются вершинами параллелограмма (вершины пространственного четырехугольника не лежат в одной плоскости).

Решение.

Пусть $ABCD$ — данный пространственный четырехугольник (рис. 16). Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — середины его сторон. Тогда A_1B_1 — средняя

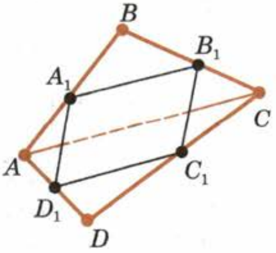


Рис. 16

линия треугольника ABC, параллельная стороне AC, C_1D_1 — средняя линия треугольника ACD, тоже параллельная стороне AC. По теореме 2.2 прямые A_1B_1 и C_1D_1 параллельны, а значит, лежат в одной плоскости. Точно так же доказывается параллельность прямых A_1D_1 и B_1C_1. Итак, четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ лежит в одной плоскости и его противолежащие стороны параллельны. Следовательно, он параллелограмм.

9. Признак параллельности прямой и плоскости

Прямая и плоскость называются **параллельными**, если они не пересекаются, то есть не имеют общих точек.

Теорема 2.3

Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

Доказательство.

Пусть α — плоскость, a — не лежащая в ней прямая и a_1 — прямая в плоскости α, параллельная прямой a. Проведем плоскость α_1 через прямые a и a_1 (рис. 17). Плоскости α и α_1 пересекаются по прямой a_1. Если бы прямая a пересекала плоскость α, то точка пересечения принадлежала бы прямой a_1. Но это невозможно, так как прямые a и a_1 параллельны. Итак, прямая a не пересекает плоскость α, а значит, параллельна плоскости α. Теорема доказана.

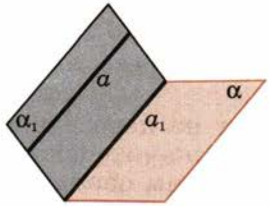


Рис. 17

Задача (15).

Докажите, что если плоскость пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

Решение.

Пусть a и b — две параллельные прямые и α — плоскость, пересекающая прямую a в точке A (рис. 18). Проведем через прямые a и b плоскость. Она пересекает плоскость α по некоторой прямой c. Прямая c пересекает прямую a

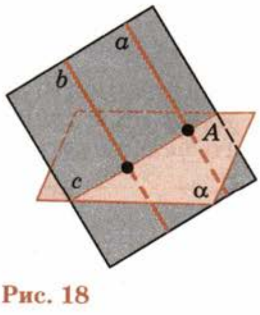


Рис. 18

(в точке A), а значит, пересекает параллельную ей прямую b. Так как прямая c лежит в плоскости α, то плоскость α пересекает прямую b.

10. Признак параллельности плоскостей

Две плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются, то есть не имеют общих точек.

Теорема

2.4

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Доказательство.

Пусть α и β — данные плоскости, a_1 и a_2 — прямые в плоскости α, пересекающиеся в точке A, b_1 и b_2 — соответственно параллельные им прямые в плоскости β (рис. 19). Допустим, что плоскости α и β не параллельны, т. е. пересекаются по некоторой прямой c. По теореме 2.3 прямые a_1 и a_2, как параллельные прямым b_1 и b_2, параллельны плоскости β, и поэтому они не пересекают лежащую в этой плоскости прямую c. Таким образом, в плоскости α через точку A проходят две прямые (a_1 и a_2), параллельные прямой c. Но это невозможно по аксиоме параллельных. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Задача (19).

Докажите, что через две скрещивающиеся прямые можно провести параллельные плоскости.

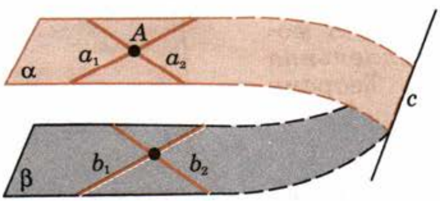


Рис. 19

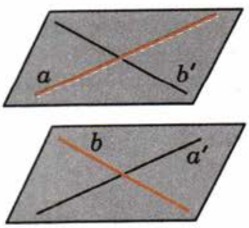


Рис. 20

Решение.

Пусть a и b — данные скрещивающиеся прямые (рис. 20). Через произвольную точку прямой a проведем прямую b', параллельную b, а через произвольную точку прямой b проведем прямую a', параллельную a. Теперь проведем две плоскости: одну через прямые a и b', а другую через прямые b и a'. По теореме 2.4 эти плоскости параллельны. В первой из них лежит прямая a, а во второй — прямая b.

11. Существование плоскости, параллельной данной плоскости

Теорема

2.5

Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.

Доказательство.

Проведем в данной плоскости α какие-нибудь две пересекающиеся прямые a и b (рис. 21). Через данную точку A проведем параллельные им прямые a_1 и b_1. Плоскость β, проходящая через прямые a_1 и b_1, по теореме 2.4 параллельна плоскости α.

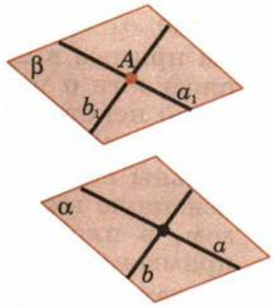


Рис. 21

Допустим, что через точку A проходит другая плоскость β_1, тоже параллельная плоскости α (рис. 22). Отметим на плоскости β_1 какую-нибудь точку C, не лежащую в плоскости β. Проведем плоскость γ через точки A, C и какую-нибудь точку B плоскости α. Эта плоскость пересечет плоскости α, β и β_1 по прямым b, a и c. Прямые a и c не пересекают прямую b, так как не пересекают плоскость α. Следовательно, они параллельны прямой b. Но в плоскости γ через точку A может проходить только одна прямая, параллельная прямой b. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана полностью.

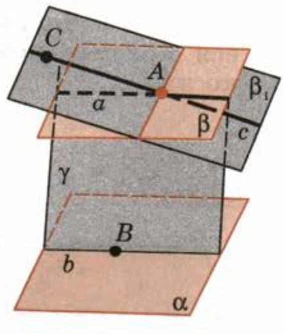


Рис. 22

Задача (23).

Плоскости α и β параллельны плоскости γ. Могут ли плоскости α и β пересекаться?

Решение.

Плоскости α и β не могут пересекаться. Если бы плоскости α и β имели общую точку, то через эту точку проходили бы две плоскости (α и β), параллельные плоскости γ. А это противоречит теореме 2.5.

12. Свойства параллельных плоскостей

Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны (рис. 23).

Действительно, согласно определению параллельные прямые — это прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются. Наши прямые лежат в одной плоскости — секущей плоскости. Они не пересекаются, так как не пересекаются содержащие их параллельные плоскости. Значит, прямые параллельны, что и требовалось доказать.

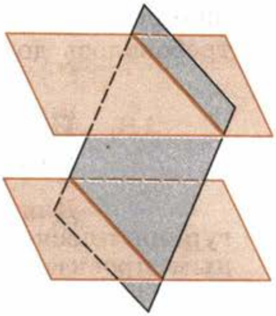


Рис. 23

Задача (33).

Даны две параллельные плоскости α_1 и α_2 и точка A, не лежащая ни в одной из этих плоскостей. Через точку A проведена произвольная прямая. Пусть X_1 и X_2 — точки пересечения этой прямой с плоскостями α_1 и α_2. Докажите, что отношение длин отрезков $AX_1 : AX_2$ не зависит от взятой прямой.

Решение.

Проведем через точку A другую прямую и обозначим через Y_1 и Y_2 точки пересечения ее с плоскостями α_1 и α_2 (рис. 24). Проведем через прямые AX_1 и AY_1 плоскость. Она пересечет плоскости α_1 и α_2 по параллельным прямым X_1Y_1 и X_2Y_2. Отсюда следует подобие треугольников AX_1Y_1 и AX_2Y_2. А из подобия треугольников следует пропорция $\frac{AX_1}{AX_2} = \frac{AY_1}{AY_2}$, т. е. отношения $AX_1 : AX_2$ и $AY_1 : AY_2$ одинаковы для обеих прямых.

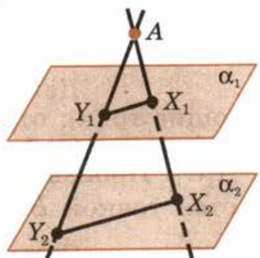


Рис. 24

Отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны.

Действительно, пусть α_1 и α_2 — параллельные плоскости, a и b — пересекающие их параллельные прямые, A_1, A_2 и B_1, B_2 — точки пересечения прямых с плоскостями (рис. 25). Проведем через прямые a и b плоскость. Она пересекает плоскости α_1 и α_2 по параллельным прямым A_1B_1 и A_2B_2. Четырехугольник $A_1B_1B_2A_2$ — параллелограмм, так как у него противолежащие стороны параллельны. А у параллелограмма противолежащие стороны равны. Значит, $A_1A_2 = B_1B_2$, что и требовалось доказать.

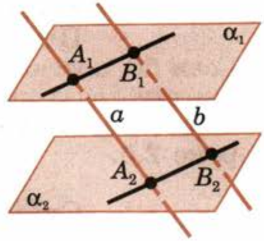


Рис. 25

13. Изображение пространственных фигур на плоскости

Для изображения пространственных фигур на плоскости обычно пользуются параллельным проектированием. Этот способ изображения фигуры состоит в следующем. Берем произвольную прямую h, пересекающую плоскость чертежа α, проводим через произвольную точку A фигуры прямую, параллельную h. Точка A_1 пересечения этой прямой с плоскостью чертежа будет изображением точки A (рис. 26). Построив таким образом изображение каждой точки фигуры, получим изображение самой фигуры. Такой способ изображения пространственной фигуры на плоскости соответствует зрительному восприятию фигуры при рассматривании ее издали.

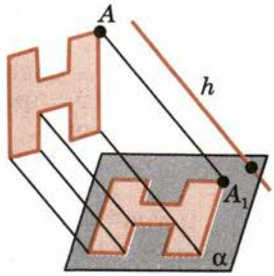


Рис. 26

Отметим некоторые свойства изображения фигуры на плоскости, вытекающие из описанного ее построения.

Прямолинейные отрезки фигуры изображаются на плоскости чертежа отрезками (рис. 27).

Действительно, все прямые, проектирующие точки отрезка AC, лежат в одной плоскости, пересекающей плоскость чертежа α по прямой A_1C_1. Произвольная точка B отрезка AC изображается точкой B_1 отрезка A_1C_1.

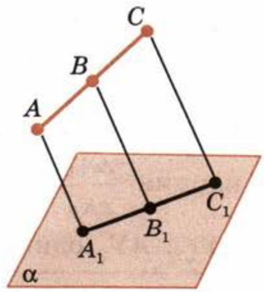


Рис. 27

Замечание.

В только что доказанном свойстве и далее предполагается, конечно, что проектируемые отрезки не параллельны направлению проектирования.

Параллельные отрезки фигуры изображаются на плоскости чертежа параллельными отрезками (рис. 28).

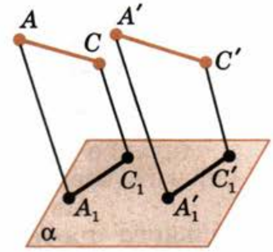


Рис. 28

Действительно, пусть AC и $A'C'$ — параллельные отрезки фигуры. Прямые A_1C_1 и $A_1'C_1'$ параллельны, так как они получаются при пересечении параллельных плоскостей с плоскостью α. Первая из этих плоскостей проходит через прямые AC и AA_1, а вторая — через прямые $A'C'$ и $A'A_1'$.

Отношение отрезков одной прямой или параллельных прямых сохраняется при параллельном проектировании.

Покажем, например, что (рис. 29)

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}. \qquad (*)$$

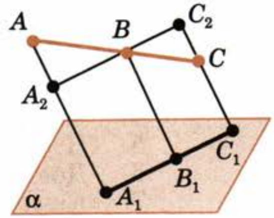


Рис. 29

Проведем через точку B прямую A_2C_2, параллельную A_1C_1. Треугольники BAA_2 и BCC_2 подобны. Из подобия треугольников и равенств $A_1B_1 = A_2B$ и $B_1C_1 = BC_2$ следует пропорция (*).

Задача (37).

Дана параллельная проекция треугольника. Как можно построить проекции медиан этого треугольника?

Решение.

При параллельном проектировании сохраняется отношение отрезков прямой. Поэтому середина стороны треугольника проектируется в середину проекции этой стороны. Следовательно, проекции медиан треугольника будут медианами его проекции.

Наряду с параллельным проектированием для изображения пространственных фигур на плоскости может использоваться также **центральное** проектирование, которое состоит в следующем. Берем произвольную точку S, не лежащую в плоскости чертежа α, и проводим через произвольную точку A фигуры прямую SA. Точка A_1 пересечения этой прямой с плоскостью чертежа будет изображением точки A (рис. 30). Построив таким образом изображение каждой точки фигуры, получим изображение самой фигуры.

Этот способ изображения дает наглядное зрительное представление о фигуре, но точные размеры ее частей при этом теряются.

Из доказанных выше трех свойств параллельного проектирования центральное проектирование обладает в полной мере только первым из них. Что касается двух других свойств, то они даже для отрезков, параллельных плоскости чертежа, выполняются не всегда.

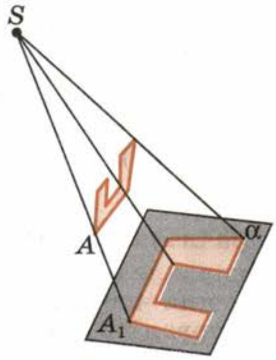


Рис. 30

Контрольные вопросы

1. Какие прямые в пространстве называются параллельными?
2. Какие прямые называются скрещивающимися?
3. Докажите, что через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.
4. Докажите признак параллельности прямых.
5. Что значит: прямая и плоскость параллельны?
6. Докажите признак параллельности прямой и плоскости.
7. Какие плоскости называются параллельными?
8. Докажите признак параллельности плоскостей.
9. Докажите, что через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.
10. Докажите, что если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.
11. Докажите, что отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны.
12. Перечислите свойства параллельного проектирования.
13. Что такое центральное проектирование и чем оно отличается от параллельного проектирования?

Задачи

Пункт 7

1. Докажите, что если прямые AB и CD скрещивающиеся, то прямые AC и BD тоже скрещиваются.
2. Можно ли через точку C, не принадлежащую скрещивающимся прямым a и b, провести две различные прямые, каждая из которых пересекает прямые a и b? Объясните ответ.

3. Докажите, что все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат в одной плоскости.

4. Прямые a и b пересекаются. Докажите, что все прямые, параллельные прямой b и пересекающие прямую a, лежат в одной плоскости.

5. Через концы отрезка AB и его середину M проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость в точках A_1, B_1 и M_1. Найдите длину отрезка MM_1, если отрезок AB не пересекает плоскость и если: 1) $AA_1 = 5$ м, $BB_1 = 7$ м; 2) $AA_1 = 3{,}6$ дм, $BB_1 = 4{,}8$ дм; 3) $AA_1 = 8{,}3$ см, $BB_1 = 4{,}1$ см; 4) $AA_1 = a$, $BB_1 = b$.

6. Решите задачу 5, если отрезок AB пересекает плоскость.

7. Через конец A отрезка AB проведена плоскость. Через конец B и точку C этого отрезка проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка BB_1, если: 1) $CC_1 = 15$ см, $AC : BC = 2 : 3$; 2) $CC_1 = 8{,}1$ см, $AB : AC = 11 : 9$; 3) $AB = 6$ см, $AC : CC_1 = 2 : 5$; 4) $AC = a$, $BC = b$, $CC_1 = c$.

Пункт 8

8. Даны параллелограмм $ABCD$ и не пересекающая его плоскость. Через вершины параллелограмма проведены параллельные прямые, пересекающие данную плоскость в точках A_1, B_1, C_1, D_1 (рис. 31). Найдите длину отрезка DD_1, если: 1) $AA_1 = 2$ м, $BB_1 = 3$ м, $CC_1 = 8$ м; 2) $AA_1 = 4$ м, $BB_1 = 3$ м, $CC_1 = 1$ м; 3) $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$.

9. Прямые a и b не лежат в одной плоскости. Можно ли провести прямую c, параллельную прямым a и b?

10. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков AB и BC, параллельна прямой, проходящей через середины отрезков AD и CD.

11. Докажите, что середины сторон пространственного четырехугольника являются вершинами параллелограмма (вершины пространственного четырехугольника не лежат в одной плоскости).

12. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Докажите, что прямые, соединяющие середины отрезков AB и CD, AC и BD, AD и BC, пересекаются в одной точке.

13. Дан треугольник ABC. Плоскость, параллельная прямой AB, пересекает сто-

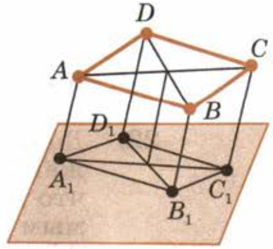


Рис. 31

рону AC этого треугольника в точке A_1, а сторону BC — в точке B_1. Найдите длину отрезка A_1B_1, если:

1) $AB = 15$ см, $AA_1 : AC = 2 : 3$;
2) $AB = 8$ см, $AA_1 : A_1C = 5 : 3$;
3) $B_1C = 10$ см, $AB : BC = 4 : 5$;
4) $AA_1 = a$, $AB = b$, $A_1C = c$.

14. Через данную точку проведите прямую, параллельную каждой из двух данных пересекающихся плоскостей.

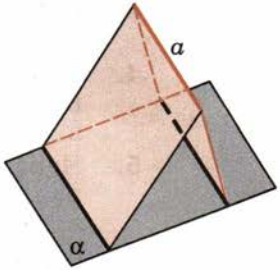


Рис. 32

Пункт 9

15. Докажите, что если плоскость пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

16. Докажите, что через любую из двух скрещивающихся прямых можно провести плоскость, параллельную другой прямой.

17. Докажите, что если две плоскости, пересекающиеся по прямой a, пересекают плоскость α по параллельным прямым, то прямая a параллельна плоскости α (рис. 32).

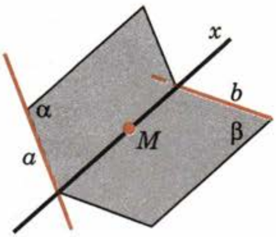


Рис. 33

Пункт 10

18. Докажите, что прямая, пересекающая одну из двух параллельных плоскостей, пересекает и другую.

19. Докажите, что через две скрещивающиеся прямые можно провести параллельные плоскости.

20. Через данную точку пространства проведите прямую, пересекающую каждую из двух скрещивающихся прямых (рис. 33). Всегда ли это возможно?

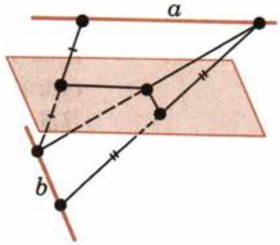


Рис. 34

21. Докажите, что геометрическое место середин отрезков с концами на двух скрещивающихся прямых есть плоскость, параллельная этим прямым (рис. 34).

22. Даны четыре точки A, B, C и D, не лежащие в одной плоскости. Докажите, что любая плоскость, параллельная прямым AB и CD, пересекает прямые AC, AD, BD и BC в вершинах параллелограмма (рис. 35).

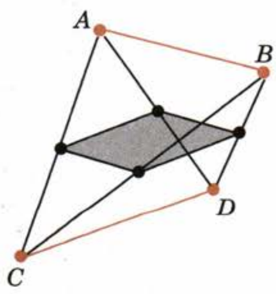


Рис. 35

Пункт 11

23. Плоскости α и β параллельны плоскости γ. Могут ли плоскости α и β пересекаться?

24. Плоскости α и β пересекаются. Докажите, что любая плоскость γ пересекает хотя бы одну из плоскостей α, β.

25. Докажите, что все прямые, проходящие через данную точку параллельно данной плоскости, лежат в одной плоскости.

26. Через данную точку проведите плоскость, параллельную каждой из двух пересекающихся прямых. Всегда ли это возможно?

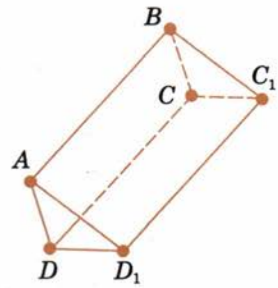


Рис. 36

Пункт 12

27. Параллелограммы $ABCD$ и ABC_1D_1 лежат в разных плоскостях. Докажите, что четырехугольник CDD_1C_1 тоже параллелограмм (рис. 36).

28. Через вершины параллелограмма $ABCD$, лежащего в одной из двух параллельных плоскостей, проведены параллельные прямые, пересекающие другую плоскость в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ тоже параллелограмм.

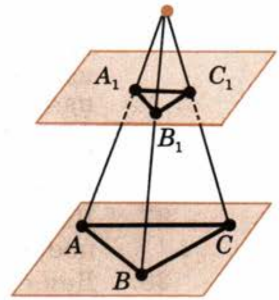


Рис. 37

29. Через вершины треугольника ABC, лежащего в одной из двух параллельных плоскостей, проведены параллельные прямые, пересекающие другую плоскость в точках A_1, B_1, C_1. Докажите равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

30. Три прямые, проходящие через одну точку, пересекают данную плоскость в точках A, B, C, а параллельную ей плоскость в точках A_1, B_1, C_1. Докажите подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 37).

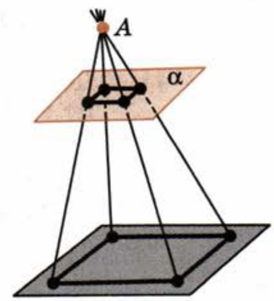


Рис. 38

31. Докажите, что если четыре прямые, проходящие через точку A, пересекают плоскость α в вершинах параллелограмма, то они пересекают любую плоскость, параллельную α и не проходящую через точку A, тоже в вершинах параллелограмма (рис. 38).

32. Даны две параллельные плоскости. Через точки A и B одной из плоскостей проведены параллельные прямые, пересекающие другую плоскость в точках A_1 и B_1. Чему равен отрезок A_1B_1, если $AB = a$?

33. Даны две параллельные плоскости α_1 и α_2 и точка A, не лежащая ни в одной из этих плоскостей. Через точку A проведена произвольная прямая. Пусть X_1 и X_2 — точки пересечения этой прямой с плоскостями α_1 и α_2. Докажите, что отношение длин отрезков $AX_1 : AX_2$ не зависит от взятой прямой.

34. Точка A лежит вне плоскости α, X — произвольная точка плоскости α, X' — точка отрезка AX, делящая его в отношении $m : n$. Докажите, что геометрическое место точек X' есть плоскость, параллельная плоскости α.

35. Даны три параллельные плоскости α_1, α_2, α_3. Пусть X_1, X_2, X_3 — точки пересечения этих плоскостей с произвольной прямой. Докажите, что отношение длин отрезков $X_1X_2 : X_2X_3$ не зависит от прямой, т. е. одинаково для любых двух прямых.

36. Даны четыре параллельные прямые. Докажите, что если какая-нибудь плоскость пересекает эти прямые в вершинах параллелограмма, то любая плоскость, не параллельная данным прямым, пересекает их в вершинах некоторого параллелограмма.

Пункт 13

37. Дана параллельная проекция треугольника. Как можно построить проекции медиан этого треугольника?

38. Дана параллельная проекция треугольника. Чем изобразится проекция средней линии треугольника?

39. Может ли при параллельном проектировании параллелограмма получиться трапеция? Объясните ответ.

40. Может ли проекция параллелограмма при параллельном проектировании быть квадратом?

41. Докажите, что параллельная проекция центрально-симметричной фигуры также является центрально-симметричной фигурой.

42. Дана параллельная проекция окружности и ее диаметра (рис. 39). Как построить проекцию перпендикулярного диаметра?

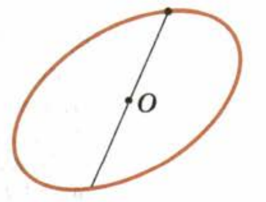


Рис. 39

§ 3 Перпендикулярность прямых и плоскостей

14. Перпендикулярность прямых в пространстве

Так же как и на плоскости, две прямые называются **перпендикулярными**, если они пересекаются под прямым углом.

Теорема

3.1

Если две пересекающиеся прямые параллельны соответственно двум перпендикулярным прямым, то они тоже перпендикулярны.

Доказательство.

Пусть a и b — перпендикулярные прямые, а a_1 и b_1 — параллельные им пересекающиеся прямые. Докажем, что прямые a_1 и b_1 перпендикулярны.

Если прямые a, b, a_1, b_1 лежат в одной плоскости, то они обладают указанным в теореме свойством, как это известно из планиметрии.

Допустим теперь, что наши прямые не лежат в одной плоскости. Тогда прямые a и b лежат в некоторой плоскости α, а прямые a_1 и b_1 — в некоторой плоскости α_1 (рис. 40).

По теореме 2.4 плоскости α и α_1 параллельны. Пусть C — точка пересечения прямых a и b, а C_1 — точка пересечения прямых a_1 и b_1. Проведем в плоскости параллельных прямых a и a_1 прямую, параллельную прямой CC_1. Она пересечет прямые a и a_1 в точках A и A_1. В плоскости прямых b и b_1 проведем прямую, параллельную прямой CC_1, и обозначим через B и B_1 точки ее пересечения с прямыми b и b_1.

Четырехугольники CAA_1C_1 и CBB_1C_1 — параллелограммы, так как у них противолежащие стороны параллельны.

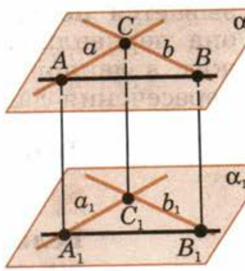


Рис. 40

Четырехугольник ABB_1A_1 также параллелограмм. У него стороны AA_1, BB_1 параллельны, потому что каждая из них параллельна прямой CC_1.

Таким образом, четырехугольник лежит в плоскости, проходящей через параллельные прямые AA_1 и BB_1. А она пересекает параллельные плоскости α и α_1 по параллельным прямым AB и A_1B_1.

Так как у параллелограмма противолежащие стороны равны, то

$$AB = A_1B_1,\ AC = A_1C_1,\ BC = B_1C_1.$$

По третьему признаку равенства треугольников треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Итак, угол $A_1C_1B_1$, равный углу ACB, прямой, т. е. прямые a_1 и b_1 перпендикулярны, что и требовалось доказать.

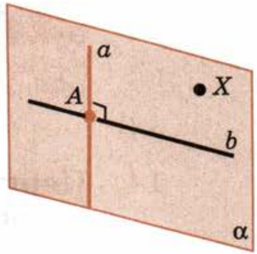


Рис. 41

Задача (1).

Докажите, что через любую точку прямой в пространстве можно провести перпендикулярную ей прямую.

Решение.

Пусть a — прямая и A — точка на ней (рис. 41). Возьмем любую точку X вне прямой a и проведем через эту точку и прямую a плоскость α (теорема 1.1). В плоскости α через точку A можно провести прямую b, перпендикулярную прямой a.

15. Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Прямая, пересекающая плоскость, называется **перпендикулярной** этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, которая лежит в данной плоскости и проходит через точку пересечения данной прямой и плоскости (рис. 42).

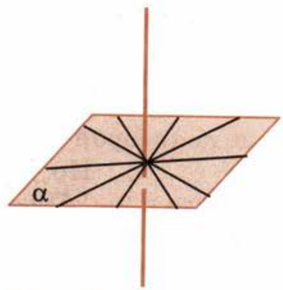


Рис. 42

Теорема

3.2

Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.

Доказательство.

Пусть a — прямая, перпендикулярная прямым b и c в плоскости α. Тогда прямая a проходит через точку A пересечения прямых b и c (рис. 43). Докажем, что прямая a перпендикулярна плоскости α.

Проведем произвольную прямую x через точку A в плоскости α и покажем, что она перпендикулярна прямой a. Проведем в плоскости α произвольную прямую, не проходящую через точку A и пересекающую прямые b, c и x. Пусть точками пересечения будут B, C и X.

Отложим на прямой a от точки A в разные стороны равные отрезки AA_1 и AA_2. Треугольник A_1CA_2 равнобедренный, так как отрезок AC является высотой по условию теоремы и медианой по построению ($AA_1 = AA_2$). По той же причине треугольник A_1BA_2 тоже равнобедренный. Следовательно, треугольники A_1BC и A_2BC равны по третьему признаку равенства треугольников.

Из равенства треугольников A_1BC и A_2BC следует равенство углов A_1BX, A_2BX и, следовательно, равенство треугольников A_1BX и A_2BX по первому признаку равенства треугольников. Из равенства сторон A_1X и A_2X этих треугольников заключаем, что треугольник A_1XA_2 равнобедренный. Поэтому его медиана XA является также высотой. А это и значит, что прямая x перпендикулярна a. По определению прямая a перпендикулярна плоскости α. Теорема доказана.

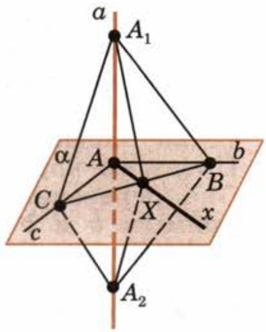


Рис. 43

16. Построение перпендикулярных прямой и плоскости

Задача (9).

Докажите, что через данную точку прямой можно провести одну и только одну перпендикулярную ей плоскость.

Решение.

Пусть a — данная прямая и A — точка на ней (рис. 44). Проведем через нее две плоскости и проведем в них через точку A прямые b и c, перпендикулярные прямой a. Плоскость α, проходящая через эти прямые, перпендикулярна прямой a по теореме 3.2.

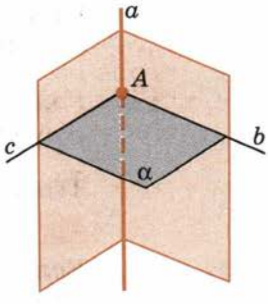


Рис. 44

Докажем, что эта плоскость единственна. Допустим, что, кроме плоскости α, существует другая плоскость α', проходящая через точку A и перпендикулярная прямой a (рис. 45). Пусть B — точка плоскости α', не лежащая в плоскости α. Проведем через точку B и прямую a плоскость. Она пересечет плоскости α и α' по различным прямым b и b', перпендикулярным прямой a. А это, как мы знаем, невозможно, так как на плоскости через данную точку прямой проходит только одна перпендикулярная ей прямая. Итак, плоскость, проходящая через точку A и перпендикулярная прямой a, единственна.

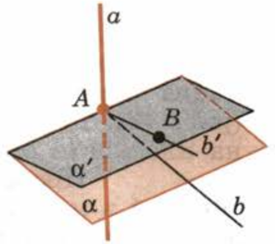


Рис. 45

Задача (11).

Докажите, что через данную точку плоскости можно провести одну и только одну перпендикулярную ей прямую.

Решение.

Пусть α — данная плоскость и A — точка на ней (рис. 46). Проведем в плоскости α через точку A две прямые b и c. Проведем через точку A перпендикулярные им плоскости. Они пересекутся по некоторой прямой a, перпендикулярной прямым b и c. Следовательно, прямая a перпендикулярна плоскости α.

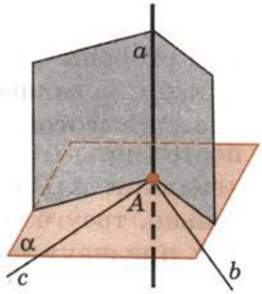


Рис. 46

Докажем, что эта прямая единственна. Допустим, что, кроме прямой a, существует другая прямая a', проходящая через точку A и перпендикулярная плоскости α (рис. 47). Проведем через прямые a и a' плоскость. Она пересечет плоскость α по некоторой прямой b, перпендикулярной прямым a и a'. А это, как мы знаем, невозможно. Итак, прямая, проходящая через данную точку плоскости и перпендикулярная этой плоскости, единственна.

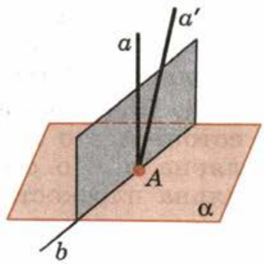


Рис. 47

17. Свойства перпендикулярных прямой и плоскости

Теорема 3.3

Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

Доказательство.

Пусть a_1 и a_2 — две параллельные прямые и α — плоскость, перпендикулярная прямой a_1 (рис. 48). Докажем, что эта плоскость перпендикулярна и прямой a_2.

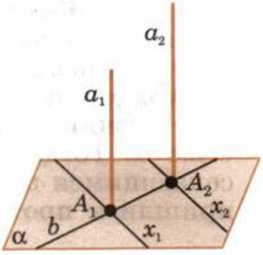


Рис. 48

Проведем через точку A_2 пересечения прямой a_2 с плоскостью α произвольную прямую x_2 в плоскости α. Проведем в плоскости α через точку A_1 пересечения прямой a_1 с плоскостью α прямую x_1, параллельную прямой x_2.

Так как прямая a_1 перпендикулярна плоскости α, то прямые a_1 и x_1 перпендикулярны. А по теореме 3.1 параллельные им пересекающиеся прямые a_2 и x_2 тоже перпендикулярны.

Таким образом, прямая a_2 перпендикулярна любой прямой x_2 в плоскости α. А это значит, что прямая a_2 перпендикулярна плоскости α. Теорема доказана.

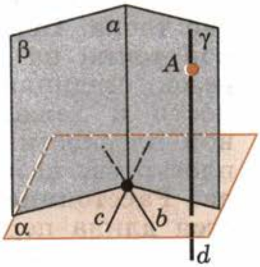


Рис. 49

Задача (12).

Докажите, что через любую точку A можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости α.

Решение.

Проведем в плоскости α две пересекающиеся прямые b и c (рис. 49). Через точку их пересечения проведем плоскости β и γ, перпендикулярные прямым b и c соответственно.

Они пересекаются по некоторой прямой a. Прямая a перпендикулярна прямым b и c, значит, и плоскости α. Проведем теперь через точку A прямую d, параллельную a. По теореме 3.3 она перпендикулярна плоскости α.

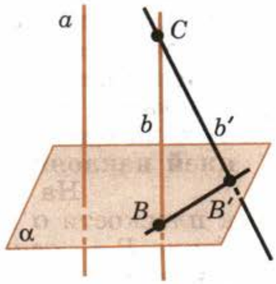


Рис. 50

Теорема 3.4

Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

Доказательство.

Пусть a и b — две прямые, перпендикулярные плоскости α (рис. 50). Допустим, что прямые a и b не параллельны.

Выберем на прямой b точку C, не лежащую в плоскости α. Проведем через точку C прямую b', параллельную прямой a. Прямая b' перпендикулярна плоскости α (теорема 3.3). Пусть B и B' — точки пересечения прямых b и b' с плоскостью α. Тогда прямая BB' перпендикулярна пересекающимся прямым b и b'. А это невозможно. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

18. Перпендикуляр и наклонная

Пусть даны плоскость и не лежащая на ней точка. **Перпендикуляром**, опущенным из данной точки на данную плоскость, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости. Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется **основанием перпендикуляра. Расстоянием** от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости. Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется **основанием наклонной**. Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется **проекцией наклонной**.

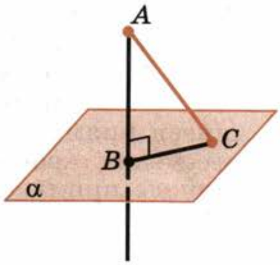


Рис. 51

На рисунке 51 из точки A проведены к плоскости α перпендикуляр AB и наклонная AC. Точка B — основание перпендикуляра, точка C — основание наклонной, BC — проекция наклонной AC на плоскость α.

Задача (26).

Докажите, что если прямая параллельна плоскости, то все ее точки находятся на одинаковом расстоянии от плоскости.

Решение.

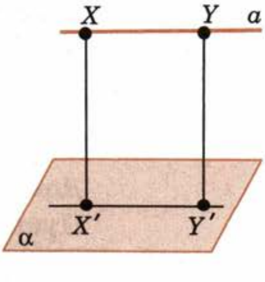


Рис. 52

Пусть a — данная прямая и α — данная плоскость (рис. 52). Возьмем на прямой a две произвольные точки X и Y. Их расстояния до плоскости α — это длины перпендикуляров XX' и YY', опущенных на эту плоскость. По теореме 3.4 прямые XX' и YY' параллельны, следовательно, лежат в одной плоскости. Эта плоскость пересекает плоскость α по прямой $X'Y'$. Прямая a параллельна прямой $X'Y'$, так как не пересекает содержащую ее плоскость α. Итак, у четырехугольника $XX'Y'Y$ противолежащие стороны параллельны. Следовательно, он параллелограмм, а значит, $XX' = YY'$.

Расстоянием от прямой до параллельной ей плоскости называется расстояние от любой точки этой прямой до плоскости.

Точно так же, как в решении задачи 26, доказывается, что расстояния от любых двух точек плоскости до параллельной плоскости равны. В связи с этим **расстоянием** между параллельными плоскостями называется расстояние от любой точки одной плоскости до другой плоскости.

19. Теорема о трех перпендикулярах

Теорема

3.5

Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она перпендикулярна наклонной. И обратно: **если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.**

Доказательство.

Пусть AB — перпендикуляр к плоскости α, AC — наклонная и c — прямая в плоскости α, проходящая через основание C наклонной (рис. 53). Проведем прямую CA', параллельную прямой AB. Она перпендикулярна плоскости α. Проведем через прямые AB и $A'C$ плоскость β. Прямая c перпендикулярна прямой CA'. Если она перпендикулярна прямой CB, то она перпендикулярна плоскости β, а значит, и прямой AC.

Аналогично если прямая c перпендикулярна наклонной CA, то она, будучи перпендикулярна и прямой CA', перпендикулярна плоскости β, а значит, и проекции наклонной BC. Теорема доказана.

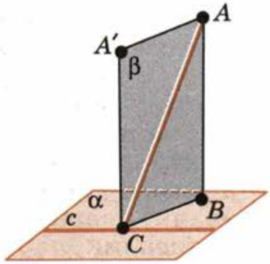


Рис. 53

Задача (45).

Через центр вписанной в треугольник окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Докажите, что каждая точка этой прямой равноудалена от сторон данного треугольника.

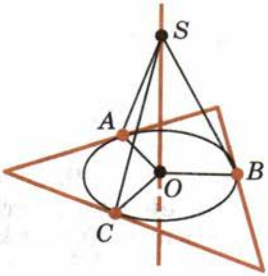


Рис. 54

Решение.

Пусть A, B, C — точки касания сторон треугольника с окружностью, O — центр окружности и S — точка на перпендикуляре (рис. 54). Так как радиус OA перпендикулярен стороне треугольника, то по теореме о трех перпендикулярах отрезок SA есть перпендикуляр к этой стороне, а его длина — расстояние от точки S до стороны треугольника. По теореме Пифагора

$$SA = \sqrt{AO^2 + OS^2} = \sqrt{r^2 + OS^2},$$

где r — радиус вписанной окружности. Аналогично находим $SB = \sqrt{r^2 + OS^2}$, $SC = \sqrt{r^2 + OS^2}$, т. е. все расстояния от точки S до сторон треугольника равны.

20. Признак перпендикулярности плоскостей

Две пересекающиеся плоскости называются **перпендикулярными**, если третья плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.

На рисунке 55, *а* вы видите две перпендикулярные плоскости α и β, пересекающиеся по прямой c. Плоскость γ, перпендикулярная прямой c, пересекает плоскости α и β по перпендикулярным прямым a и b.

Любая плоскость, перпендикулярная линии пересечения перпендикулярных плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.

Действительно, если взять другую плоскость γ', перпендикулярную прямой c (рис. 55, *б*), то она пересечет плоскость α по прямой a', перпендикулярной c, а значит, параллельной прямой a, а плоскость β по прямой b', перпендикулярной c и, значит, параллельной прямой b. По теореме 3.1 из перпендикулярности прямых a и b следует перпендикулярность прямых a' и b', что и требовалось доказать.

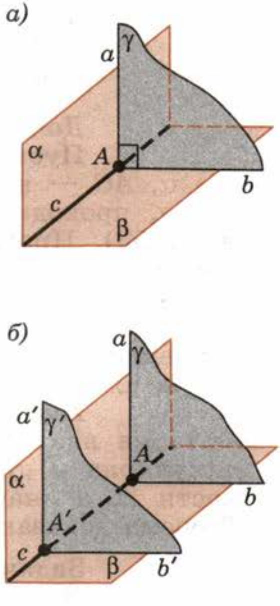


Рис. 55

Теорема

3.6

Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

Доказательство.

Пусть α — плоскость, b — перпендикулярная ей прямая, β — плоскость, проходящая через прямую b, и c — прямая, по которой пересекаются плоскости α и β (рис. 56). Докажем, что плоскости α и β перпендикулярны.

Проведем в плоскости α через точку пересечения прямой b с плоскостью α прямую a, перпендикулярную прямой c. Проведем через прямые a и b плоскость γ. Она перпендикулярна прямой c, так как прямая c перпендикулярна прямым a и b. Так как прямые a и b перпендикулярны, то плоскости α и β перпендикулярны. Теорема доказана.

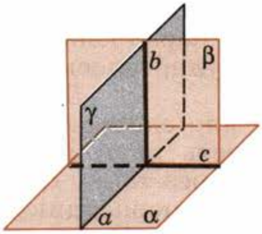


Рис. 56

Задача (54).

Даны прямая a и плоскость α. Проведите через прямую a плоскость, перпендикулярную плоскости α.

Решение.

Через произвольную точку прямой a проводим прямую b (рис. 57), перпендикулярную плоскости α (задача 12). Через прямые a и b проводим плоскость β. Плоскость β перпендикулярна плоскости α по теореме 3.6.

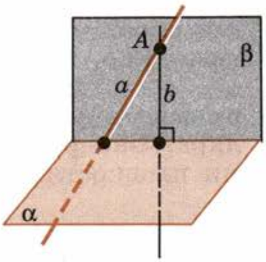


Рис. 57

21. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называется отрезок с концами на этих прямых, являющийся перпендикуляром к каждой из них.

Докажем, что

две скрещивающиеся прямые имеют общий перпендикуляр, и притом только один. Он является общим перпендикуляром параллельных плоскостей, проходящих через эти прямые.

Действительно, пусть a и b — данные скрещивающиеся прямые (рис. 58). Проведем через них параллельные плоскости α и β. Прямые, пересекающие прямую a и перпендикулярные плоскости α, лежат в одной плоскости (γ). Эта плоскость пересекает плоскость β по прямой a', параллельной a. Пусть B — точка пересечения прямых a' и b. Тогда прямая AB, перпендикулярная плоскости α, перпендикулярна и плоскости β, так как β параллельна α. Отрезок AB — общий перпендикуляр плоскостей α и β, а значит, и прямых a и b.

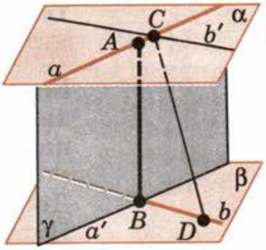


Рис. 58

Докажем, что этот общий перпендикуляр единственный. Допустим, что у прямых a и b есть другой общий перпендикуляр CD. Проведем через точку C прямую b', параллельную b. Прямая CD перпендикулярна прямой b, а значит, и прямой b'. Так как она перпендикулярна прямой a, то она перпендикулярна плоскости α, а значит, параллельна прямой AB. Выходит, что через прямые AB и CD, как через параллельные, можно провести плоскость. В этой плоскости будут лежать наши скрещивающиеся прямые AC и BD, а это невозможно, что и требовалось доказать.

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра. Оно равно расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые.

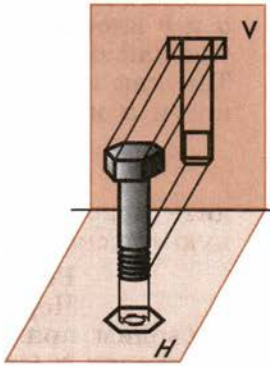


Рис. 59

22. Применение ортогонального проектирования в техническом черчении

В черчении применяется ортогональное проектирование, т. е. параллельное проектирование прямыми, перпендикулярными плоскости проекции. Чертежи деталей машин получаются путем ортогонального проектирования на одну, две или три взаимно перпендикулярные плоскости. Эти плоскости называются плоскостями проекций. Плоскости проекций с проекциями изображаемой детали на них совмещаются поворотом около прямых, по которым они пересекаются.

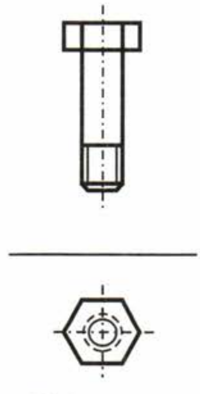


Рис. 60

На рисунке 59 показано выполнение чертежа болта путем проектирования на две плоскости: горизонтальную H и вертикальную V. Чертеж болта в двух проекциях показан на рисунке 60.

При выполнении чертежей деталей машин пользуются различными условностями, предусмотренными стандартом. В частности, резьба условно изображается сплошной тонкой линией, а центровые и осевые — штрихпунктирными линиями. Эти условности изображения применены на чертеже болта (см. рис. 60).

Контрольные вопросы

1. Какие прямые в пространстве называются перпендикулярными?
2. Докажите, что пересекающиеся прямые, соответственно параллельные перпендикулярным прямым, сами перпендикулярны.
3. Дайте определение перпендикулярности прямой и плоскости.
4. Докажите признак перпендикулярности прямой и плоскости.
5. Докажите, что если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.
6. Докажите, что две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.
7. Что такое перпендикуляр, опущенный из данной точки на плоскость?
8. Что называется расстоянием от точки до плоскости?
9. Что такое наклонная, проведенная из данной точки к плоскости? Что такое проекция наклонной?
10. Докажите теорему о трех перпендикулярах.
11. Какие плоскости называются перпендикулярными?
12. Докажите признак перпендикулярности плоскостей.
13. Что такое общий перпендикуляр скрещивающихся прямых?
14. Докажите, что скрещивающиеся прямые имеют общий перпендикуляр, и притом только один. Он является общим перпендикуляром параллельных плоскостей, проходящих через эти прямые.
15. Что называется расстоянием между скрещивающимися прямыми?

Задачи

Пункт 14

1. Докажите, что через любую точку прямой в пространстве можно провести перпендикулярную ей прямую.
2. Докажите, что через любую точку прямой в пространстве можно провести две различные перпендикулярные ей прямые.

3. Прямые AB, AC и AD попарно перпендикулярны (рис. 61). Найдите отрезок CD, если:
1) $AB = 3$ см, $BC = 7$ см, $AD = 1{,}5$ см;
2) $BD = 9$ см, $BC = 16$ см, $AD = 5$ см;
3) $AB = b$, $BC = a$, $AD = d$;
4) $BD = c$, $BC = a$, $AD = d$.

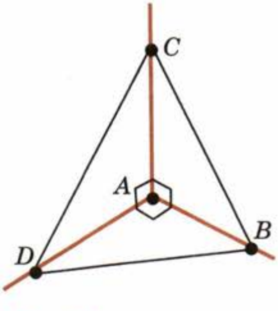


Рис. 61

4. Стороны четырехугольника $ABCD$ и прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ соответственно параллельны. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

Пункт 15

5. Докажите, что через точку, не лежащую в данной плоскости, нельзя провести более одной прямой, перпендикулярной плоскости.

6. Через центр описанной около треугольника окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Докажите, что каждая точка этой прямой равноудалена от вершин треугольника (рис. 62).

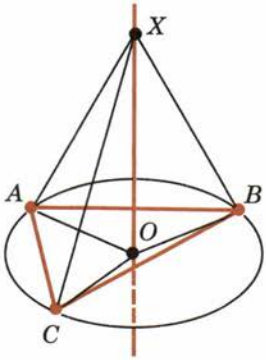


Рис. 62

7. Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена прямая AK, перпендикулярная его плоскости. Расстояния от точки K до других вершин прямоугольника равны 6 м, 7 м и 9 м. Найдите отрезок AK.

8. Через вершину острого угла прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C проведена прямая AD, перпендикулярная плоскости треугольника. Найдите расстояния от точки D до вершин B и C, если $AC = a$, $BC = b$, $AD = c$.

Пункт 16

9. Докажите, что через данную точку прямой можно провести одну и только одну перпендикулярную ей плоскость.

10. Через точку A прямой a проведены перпендикулярные ей плоскость β и прямая b. Докажите, что прямая b лежит в плоскости β.

11. Докажите, что через данную точку плоскости можно провести одну и только одну перпендикулярную ей прямую.

Пункт 17

12. Докажите, что через любую точку A можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости α.

13. Через вершину квадрата $ABCD$ проведена прямая BM, перпендикулярная его плоскости. Докажите, что: 1) прямая AD перпендикулярна плоскости прямых AB и BM; 2) прямая CD перпендикулярна плоскости прямых BC и BM.

14. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные плоскости α, пересекающие ее в точках C и D соответственно. Найдите расстояние между точками A и B, если $AC = 3$ м, $BD = 2$ м, $CD = 2{,}4$ м и отрезок AB не пересекает плоскость α.

15. Верхние концы двух вертикально стоящих столбов, удаленных на расстояние 3,4 м, соединены перекладиной. Высота одного столба 5,8 м, а другого — 3,9 м. Найдите длину перекладины.

16. Телефонная проволока длиной 15 м протянута от телефонного столба, где она прикреплена на высоте 8 м от поверхности земли, к дому, где ее прикрепили на высоте 20 м. Найдите расстояние между домом и столбом, предполагая, что проволока не провисает.

Пункт 18

17. Точка A находится на расстоянии a от вершин равностороннего треугольника со стороной a. Найдите расстояние от точки A до плоскости треугольника.

18. Из точки S вне плоскости α проведены к ней три равные наклонные SA, SB, SC и перпендикуляр SO. Докажите, что основание перпендикуляра O является центром окружности, описанной около треугольника ABC.

19. Стороны равностороннего треугольника равны 3 м. Найдите расстояние до плоскости треугольника от точки, которая находится на расстоянии 2 м от каждой из его вершин.

20. В равнобедренном треугольнике основание и высота равны 4 м. Данная точка находится на расстоянии 6 м от плоскости треугольника и на равном расстоянии от его вершин. Найдите это расстояние.

21. Расстояния от точки A до вершин квадрата равны a. Найдите расстояние от точки A до плоскости квадрата, если сторона квадрата равна b.

22. Найдите геометрическое место оснований наклонных данной длины, проведенных из данной точки к плоскости.

23. Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 10 см и 17 см. Разность проекций этих наклонных равна 9 см. Найдите проекции наклонных.

24. Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длины наклонных, если: 1) одна из них на 26 см больше другой, а проекции наклонных равны 12 см и 40 см; 2) наклонные относятся как 1 : 2, а проекции наклонных равны 1 см и 7 см.

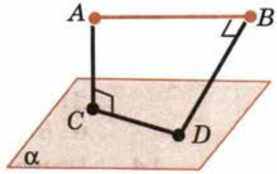


Рис. 63

25. Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 23 см и 33 см. Найдите расстояние от этой точки до плоскости, если проекции наклонных относятся как 2 : 3.

26. Докажите, что если прямая параллельна плоскости, то все ее точки находятся на одинаковом расстоянии от плоскости.

27. Через вершину прямого угла C прямоугольного треугольника ABC проведена плоскость, параллельная гипотенузе, на расстоянии 1 м от нее. Проекции катетов на эту плоскость равны 3 м и 5 м. Найдите гипотенузу.

28. Через одну сторону ромба проведена плоскость на расстоянии 4 м от противолежащей стороны. Проекции диагоналей на эту плоскость равны 8 м и 2 м. Найдите проекции сторон.

29. Из концов отрезка AB, параллельного плоскости, проведены перпендикуляр AC и наклонная BD, перпендикулярная отрезку AB (рис. 63). Чему равно расстояние CD, если $AB = a$, $AC = b$, $BD = c$?

30. Докажите, что расстояния от всех точек плоскости до параллельной плоскости одинаковы.

31. Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно a. Отрезок длины b своими концами упирается в эти плоскости. Найдите проекцию отрезка на каждую из плоскостей.

32. Два отрезка длин a и b упираются концами в две параллельные плоскости. Проекция первого отрезка (длины a) на плоскость равна c. Найдите проекцию второго отрезка.

33. Концы данного отрезка, не пересекающего плоскость, удалены от нее на 0,3 м и 0,5 м. Как удалена от плоскости точка, делящая данный отрезок в отношении 3 : 7?

34. Через середину отрезка проведена плоскость. Докажите, что концы отрезка находятся на одинаковом расстоянии от этой плоскости.

35. Через диагональ параллелограмма проведена плоскость. Докажите, что концы другой диагонали находятся на одинаковом расстоянии от этой плоскости.

36. Найдите расстояние от середины отрезка AB до плоскости, не пересекающей этот отрезок, если расстояния от точек A и B до плоскости равны: 1) 3,2 см и 5,3 см; 2) 7,4 см и 6,1 см; 3) a и b.

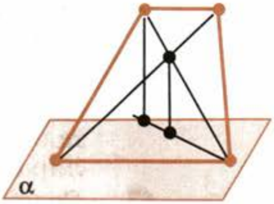


Рис. 64

37. Решите предыдущую задачу, считая, что отрезок AB пересекает плоскость.

38. Отрезок длиной 1 м пересекает плоскость, концы его удалены от плоскости на 0,5 м и 0,3 м. Найдите длину проекции отрезка на плоскость.

39. Через основание трапеции проведена плоскость, отстоящая от другого основания на расстояние a. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до этой плоскости, если основания трапеции относятся как $m : n$ (рис. 64).

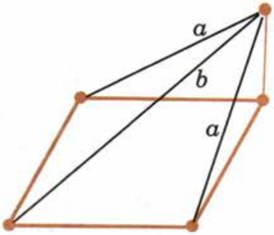


Рис. 65

40. Через сторону параллелограмма проведена плоскость на расстоянии a от противолежащей стороны. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей параллелограмма до этой плоскости.

41. Из вершины квадрата восставлен перпендикуляр к его плоскости. Расстояния от конца этого перпендикуляра до других вершин квадрата равны a и b ($a < b$). Найдите длину перпендикуляра и сторону квадрата (рис. 65).

42. Из вершины прямоугольника восставлен перпендикуляр к его плоскости. Расстояния от конца этого перпендикуляра до других вершин прямоугольника равны a, b, c ($a < c$, $b < c$). Найдите длину перпендикуляра и стороны прямоугольника.

43. Из данной точки к плоскости проведены две равные наклонные длиной 2 м. Найдите расстояние от точки до плоскости, если наклонные образуют угол 60°, а их проекции перпендикулярны.

44. Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние 1 м, проведены две равные наклонные. Найдите расстояние между основаниями наклонных, если известно, что наклонные перпендикулярны и образуют с перпендикуляром к плоскости углы, равные 60°.

Пункт 19

45. Через центр вписанной в треугольник окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника.

Докажите, что каждая точка этой прямой равноудалена от сторон данного треугольника.

46. К плоскости треугольника из центра вписанной в него окружности радиуса 0,7 м восставлен перпендикуляр длиной 2,4 м. Найдите расстояние от конца этого перпендикуляра до сторон треугольника.

47. Расстояние от данной точки до плоскости треугольника равно 1,1 м, а до каждой из его сторон — 6,1 м. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

48. Из вершины равностороннего треугольника ABC восставлен перпендикуляр AD к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки D до стороны BC, если $AD = 13$ см, $BC = 6$ см.

49. Через конец A отрезка AB длины b проведена плоскость, перпендикулярная отрезку, и в этой плоскости проведена прямая. Найдите расстояние от точки B до прямой, если расстояние от точки A до прямой равно a.

50. Расстояния от точки A до всех сторон квадрата равны a. Найдите расстояние от точки A до плоскости квадрата, если диагональ квадрата равна d.

51. Точка M, лежащая вне плоскости данного прямого угла, удалена от вершины угла на расстояние a, а от его сторон на расстояние b. Найдите расстояние от точки M до плоскости угла.

52. Дан равнобедренный треугольник с основанием 6 м и боковой стороной 5 м. Из центра вписанного круга восставлен перпендикуляр к плоскости треугольника длиной 2 м. Найдите расстояние от конца этого перпендикуляра до сторон треугольника.

53. Из вершины прямого угла C треугольника ABC восставлен перпендикуляр CD к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки D до гипотенузы треугольника, если $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$.

Пункт 20

54. Даны прямая a и плоскость α. Проведите через прямую a плоскость, перпендикулярную плоскости α.

55. Даны прямая a и плоскость α. Докажите, что все прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие прямую a, лежат в одной плоскости, перпендикулярной плоскости α.

56. Из вершин A и B равностороннего треугольника ABC восставлены перпендикуляры AA_1 и BB_1 к плоскости треугольника. Найдите расстояние от вершины C до середины отрезка A_1B_1, если $AB = 2$ м, $CA_1 = 3$ м, $CB_1 = 7$ м и отрезок A_1B_1 не пересекает плоскость треугольника.

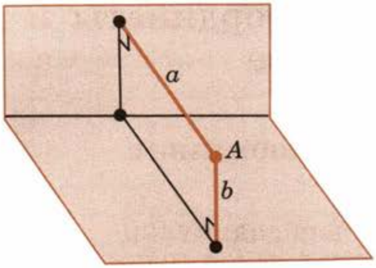


Рис. 66

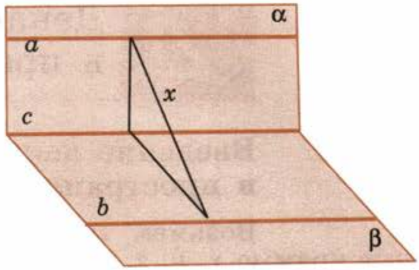


Рис. 67

57. Из вершин A и B острых углов прямоугольного треугольника ABC восставлены перпендикуляры AA_1 и BB_1 к плоскости треугольника. Найдите расстояние от вершины C до середины отрезка A_1B_1, если $A_1C = 4$ м, $A_1A = 3$ м, $B_1C = 6$ м, $B_1B = 2$ м и отрезок A_1B_1 не пересекает плоскость треугольника.

58. Докажите, что если прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна линии их пересечения, то она перпендикулярна и другой плоскости.

59. Из точек A и B, лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры AC и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка AB, если: 1) $AC = 6$ м, $BD = 7$ м, $CD = 6$ м; 2) $AC = 3$ м, $BD = 4$ м, $CD = 12$ м; 3) $AD = 4$ м, $BC = 7$ м, $CD = 1$ м; 4) $AD = BC = 5$ м, $CD = 1$ м; 5) $AC = a$, $BD = b$, $CD = c$; 6) $AD = a$, $BC = b$, $CD = c$.

60. Точка находится на расстояниях a и b от двух перпендикулярных плоскостей. Найдите расстояние от этой точки до прямой пересечения плоскостей (рис. 66).

61. Плоскости α и β перпендикулярны. В плоскости α взята точка A, расстояние от которой до прямой c (линии пересечения плоскостей) равно 0,5 м. В плоскости β проведена прямая b, параллельная прямой c и отстоящая на 1,2 м от нее. Найдите расстояние от точки A до прямой b.

62. Перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой c. В плоскости α проведена прямая a, параллельная прямой c, в плоскости β — прямая b, параллельная прямой c. Найдите расстояние между прямыми a и b, если расстояние между прямыми a и c равно 1,5 м, а между прямыми b и c — 0,8 м (рис. 67).

§ 4 Декартовы координаты и векторы в пространстве

23. Введение декартовых координат в пространстве

Возьмем три взаимно перпендикулярные прямые x, y, z, пересекающиеся в одной точке O (рис. 68). Проведем через каждую пару этих прямых плоскость. Плоскость, проходящая через прямые x и y, называется плоскостью xy. Две другие плоскости называются соответственно xz и yz. Прямые x, y, z называются **координатными осями** (или **осями координат**), точка их пересечения O — **началом координат**, а плоскости xy, yz и xz — **координатными плоскостями**. Точка O разбивает каждую из осей координат на две полупрямые — полуоси, которые мы условимся называть положительной и отрицательной.

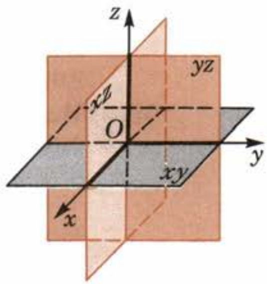


Рис. 68

Возьмем теперь произвольную точку A и проведем через нее плоскость, параллельную плоскости yz (рис. 69). Она пересекает ось x в некоторой точке A_x. **Координатой** x точки A будем называть число, равное по абсолютной величине длине отрезка OA_x: положительное, если точка A_x лежит на положительной полуоси x, и отрицательное, если она лежит на отрицательной полуоси. Если точка A_x совпадает с точкой O, то полагаем $x = 0$. Аналогично определяются координаты y и z точки A. Координаты точки будем записывать в скобках рядом с буквенным обозначением точки: $A\ (x;\ y;\ z)$. Иногда будем обозначать точку просто ее координатами $(x;\ y;\ z)$.

Задача (2).

Даны точки $A\ (1;\ 2;\ 3)$, $B\ (0;\ 1;\ 2)$, $C\ (0;\ 0;\ 3)$, $D\ (1;\ 2;\ 0)$. Какие из этих точек лежат: 1) в плоскости xy; 2) на оси z; 3) в плоскости yz?

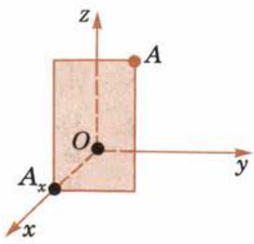


Рис. 69

Решение.

У точек плоскости xy координата z равна нулю. Поэтому только точка D лежит в плоскости xy. У точек плоскости yz координата x равна нулю. Следовательно, точки B и C лежат в плоскости yz. У точек на оси z две координаты (x и y) равны нулю. Поэтому только точка C лежит на оси z.

24. Расстояние между точками

Выразим расстояние между двумя точками A_1 (x_1; y_1; z_1) и A_2 (x_2; y_2; z_2) через координаты этих точек.

Рассмотрим сначала случай, когда прямая A_1A_2 не параллельна оси z (рис. 70). Проведем через точки A_1 и A_2 прямые, параллельные оси z. Они пересекут плоскость xy в точках A_1' и A_2'. Эти точки имеют те же координаты x, y, что и точки A_1, A_2, а координата z у них равна нулю. Проведем теперь плоскость через точку A_2, параллельную плоскости xy. Она пересечет прямую A_1A_1' в некоторой точке C. По теореме Пифагора

$$A_1A_2^2 = A_1C^2 + CA_2^2.$$

Отрезки CA_2 и $A_1'A_2'$ равны, а

$$A_1'A_2'^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Длина отрезка A_1C равна $|z_1 - z_2|$. Поэтому

$$A_1A_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Если отрезок A_1A_2 параллелен оси z, то $A_1A_2 = |z_1 - z_2|$. Тот же результат дает и полученная формула, так как в этом случае $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Таким образом,

расстояние между точками A_1 (x_1; y_1; z_1) и A_2 (x_2; y_2; z_2) вычисляется по формуле

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Задача (5).

В плоскости xy найдите точку D (x; y; 0), равноудаленную от трех данных точек: A (0; 1; −1), B (−1; 0; 1), C (0; −1; 0).

Решение.

Имеем:

$$AD^2 = (x - 0)^2 + (y - 1)^2 + (0 + 1)^2,$$
$$BD^2 = (x + 1)^2 + (y - 0)^2 + (0 - 1)^2,$$
$$CD^2 = (x - 0)^2 + (y + 1)^2 + (0 - 0)^2.$$

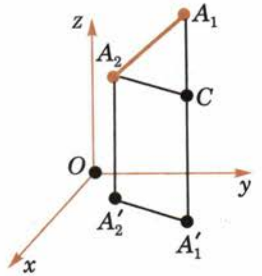


Рис. 70

Приравнивая первые два расстояния третьему, получим два уравнения для определения x и y:

$$-4y + 1 = 0,\ 2x - 2y + 1 = 0.$$

Отсюда $y = \frac{1}{4}$, $x = -\frac{1}{4}$. Искомая точка $D\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; 0\right)$.

25. Координаты середины отрезка

Пусть A_1 $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и A_2 $(x_2;\ y_2;\ z_2)$ — две произвольные точки. Выразим координаты x, y, z середины C отрезка A_1A_2 через координаты его концов A_1 и A_2 (рис. 71). Для этого проведем через точки A_1, A_2 и C прямые, параллельные оси z. Они пересекут плоскость xy в точках A_1' $(x_1;\ y_1;\ 0)$, A_2' $(x_2;\ y_2;\ 0)$ и C' $(x;\ y;\ 0)$. По теореме Фалеса точка C' является серединой отрезка $A_1'A_2'$. А мы знаем, что на плоскости xy координаты середины отрезка выражаются через координаты его концов по формулам

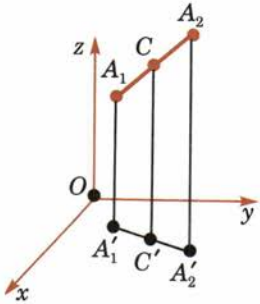


Рис. 71

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Для того чтобы найти выражение для z, достаточно вместо плоскости xy взять плоскость xz или yz. При этом для z получается аналогичная формула:

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Итак,

координаты середины отрезка с концами A_1 $(x_1;$ $y_1;\ z_1)$ и $A_2\,(x_2;\ y_2;\ z_2)$ вычисляются по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Задача (9).

Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (1; 3; 2), B (0; 2; 4), C (1; 1; 4), D (2; 2; 2) является параллелограммом.

Решение.

Как мы знаем, четырехугольник, у которого диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, есть параллелограмм. Воспользуемся этим для решения задачи. Координатами середины отрезка AC будут

$$x = \frac{1+1}{2} = 1,\ y = \frac{3+1}{2} = 2,\ z = \frac{2+4}{2} = 3.$$

Координатами середины отрезка BD будут

$$x = \frac{0+2}{2} = 1,\ y = \frac{2+2}{2} = 2,\ z = \frac{4+2}{2} = 3.$$

Мы видим, что координаты середин отрезков AC и BD одинаковы. Значит, эти отрезки пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

26. Преобразование симметрии в пространстве

Понятие преобразования для фигур в пространстве определяется так же, как и на плоскости. Так же, как и на плоскости, определяются преобразования симметрии относительно точки и прямой.

Кроме симметрий относительно точки и прямой в пространстве, рассматривают преобразование симметрии относительно плоскости. Это преобразование состоит в следующем (рис. 72). Пусть α — произвольная фиксированная плоскость. Из точки X фигуры опускаем перпендикуляр XA на плоскость α и на его продолжении за точку A откладываем отрезок AX', равный XA. Точка X' называется **симметричной** точке X относительно плоскости α, а преобразование, которое переводит точку X в симметричную ей точку X', называется **преобразованием симметрии относительно плоскости** α.

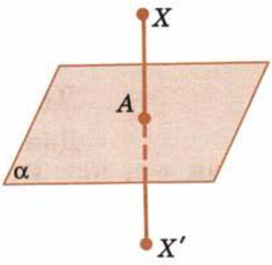


Рис. 72

Если точка X лежит в плоскости α, то считается, что точка X переходит в себя. Если преобразование симметрии относительно плоскости α переводит фигуру в себя, то фигура называется **симметричной относительно плоскости** α, а плоскость α называется **плоскостью симметрии** этой фигуры.

Задача (17).

Даны точки (1; 2; 3), (0; −1; 2), (1; 0; −3). Найдите точки, симметричные данным относительно координатных плоскостей.

Решение.

Точка, симметричная точке (1; 2; 3) относительно плоскости xy, лежит на прямой, перпендикулярной плоскости xy. Поэтому у нее те же координаты x и y: $x = 1$, $y = 2$. Симметричная точка находится на том же расстоянии от плоскости xy, но по другую сторону от нее. Поэтому координата z у нее отличается только знаком, т. е. $z = -3$. Итак, точкой, симметричной точке (1; 2; 3) относительно плоскости xy, будет точка (1; 2; −3). Для других точек и других координатных плоскостей решение аналогично.

27. Симметрия в природе и на практике

Симметрия широко используется на практике, в строительстве и технике (рис. 73).

Симметрия широко распространена в природе. Ее можно наблюдать в форме листьев и цветов растений, в расположении различных органов животных, в форме кристаллических тел (рис. 74).

28. Движение в пространстве

Движение в пространстве определяется так же, как и на плоскости. А именно: **движением** называется преобразование, при котором сохраняются расстояния между точками.

Дословно так же, как и для движения на плоскости, доказывается, что при движении в пространстве прямые переходят в прямые, полупрямые — в полупрямые, отрезки — в отрезки и сохраняются углы между полупрямыми.

Новым свойством движения в пространстве является то, что

движение переводит плоскости в плоскости.

Рис. 73

Докажем это свойство. Пусть α — произвольная плоскость (рис. 75). Отметим на ней любые три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. При движении они перейдут в три точки A', B', C', также не лежащие на одной прямой. Проведем через них плоскость α'.

Докажем, что при рассматриваемом движении плоскость α переходит в плоскость α'.

Пусть X — произвольная точка плоскости α. Проведем через нее какую-нибудь прямую a в плоскости α, пересекающую треугольник ABC в двух точках Y и Z. Прямая a перейдет при движении в некоторую прямую a'. Точки Y и Z прямой a перейдут в точки Y' и Z', принадлежащие треугольнику $A'B'C'$, а значит, плоскости α'. Итак, прямая a' лежит в плоскости α'. Точка X при движении переходит в точку X' прямой a', а значит, и плоскости α', что и требовалось доказать.

В пространстве, так же как и на плоскости, две фигуры называются **равными**, если они совмещаются движением.

29. Параллельный перенос в пространстве

Параллельным переносом в пространстве называется такое преобразование, при котором произвольная точка $(x;\ y;\ z)$ фигуры переходит в точку $(x + a;\ y + b;\ z + c)$, где числа a, b, c одни и те же для всех точек $(x;\ y;\ z)$. Параллельный перенос в пространстве задается формулами

$$x' = x + a,\ y' = y + b,\ z' = z + c,$$

выражающими координаты x', y', z' точки, в которую переходит точка $(x;\ y;\ z)$ при параллельном переносе. Так же как и на плоскости, доказываются следующие свойства параллельного переноса:

1. Параллельный перенос есть движение.
2. При параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние.
3. При параллельном переносе каждая прямая переходит в параллельную ей прямую (или в себя).
4. Каковы бы ни были точки A и A', существует единственный параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку A'.

Рис. 74

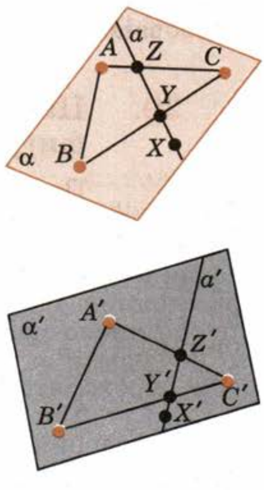


Рис. 75

Задача (23).

Найдите значения a, b, c в формулах параллельного переноса $x' = x + a$, $y' = y + b$, $z' = z + c$, если при этом параллельном переносе точка A (1; 0; 2) переходит в точку A' (2; 1; 0).

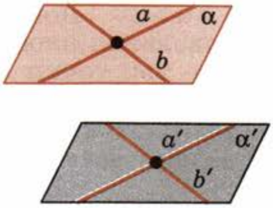


Рис. 76

Решение.

Подставляя в формулы параллельного переноса координаты точек A и A', т. е. $x = 1$, $y = 0$, $z = 2$, $x' = 2$, $y' = 1$, $z' = 0$, получим уравнения, из которых определяются a, b, c:

$$2 = 1 + a,\ 1 = 0 + b,\ 0 = 2 + c.$$

Отсюда $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$.

Новым для параллельного переноса в пространстве является следующее свойство:

5. При параллельном переносе в пространстве каждая плоскость переходит либо в себя, либо в параллельную ей плоскость.

Действительно, пусть α — произвольная плоскость (рис. 76). Проведем в этой плоскости две пересекающиеся прямые a и b. При параллельном переносе прямые a и b переходят либо в себя, либо в параллельные прямые a' и b'. Плоскость α переходит в некоторую плоскость α', проходящую через прямые a' и b'. Если плоскость α' не совпадает с α, то по теореме 2.4 она параллельна α, что и требовалось доказать.

30. Подобие пространственных фигур

Преобразование подобия в пространстве определяется так же, как и на плоскости. А именно: преобразование фигуры F называется **преобразованием подобия**, если при этом преобразовании расстояния между точками изменяются в одно и то же число раз, т. е. для любых двух точек X и Y фигуры F и точек X', Y' фигуры F', в которые они переходят, $X'Y' = k \cdot XY$.

Так же как и на плоскости, преобразование подобия в пространстве переводит прямые в прямые, полупрямые в полупрямые, отрезки в отрезки и сохраняет углы между полупрямыми. Такими же рассуждениями, как в п. 28, доказывается, что преобразование подобия переводит плоскости в плоскости. Так же как и на плоскости, две фигуры называются **подобными**, если они переводятся одна в другую преобразованием подобия.

Простейшим преобразованием подобия в пространстве является гомотетия. Так же как и на плоскости, **гомотетия** относительно центра O с коэффициентом гомотетии k — это преобразование, которое переводит произвольную точку X в точку X' луча OX, такую, что $OX' = k \cdot OX$.

Преобразование гомотетии в пространстве переводит любую плоскость, не проходящую через центр гомотетии, в параллельную плоскость (или в себя при $k = 1$).

Действительно, пусть O — центр гомотетии и α — любая плоскость, не проходящая через точку O (рис. 77). Возьмем любую прямую AB в плоскости α. Преобразование гомотетии переводит точку A в точку A' на луче OA, а точку B в точку B' на луче OB, причем $\frac{OA'}{OA} = k$, $\frac{OB'}{OB} = k$, где k —коэффициент гомотетии. Отсюда следует подобие треугольников AOB и $A'OB'$. Из подобия треугольников следует равенство соответственных углов OAB и $OA'B'$, а значит, параллельность прямых AB и $A'B'$.

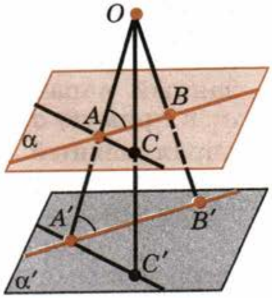


Рис. 77

Возьмем теперь другую прямую AC в плоскости α. Она при гомотетии перейдет в параллельную прямую $A'C'$. При рассматриваемой гомотетии плоскость α перейдет в плоскость α', проходящую через прямые $A'B'$, $A'C'$. Так как $A'B' \parallel AB$ и $A'C' \parallel AC$, то по теореме 2.4 плоскости α и α' параллельны, что и требовалось доказать.

31. Угол между скрещивающимися прямыми

Две пересекающиеся прямые образуют смежные и вертикальные углы. Вертикальные углы равны, а смежные углы дополняют друг друга до 180°. Угловая мера меньшего из них называется **углом между прямыми.** Угол между перпендикулярными прямыми равен 90° по определению. Угол между параллельными прямыми считаем равным 0°.

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, которые параллельны данным скрещивающимся прямым.

Этот угол не зависит от того, какие взяты пересекающиеся прямые. Докажем это.

Пусть a_1 и b_1 — пересекающиеся в точке A прямые, параллельные данным скрещивающимся прямым a и b (рис. 78). Пусть a_2 и b_2 — другие прямые, параллельные данным и пересекающиеся в точке B. По теореме 2.2 прямые a_1 и a_2 параллельны (или совпадают) и прямые b_1 и b_2 параллельны (или совпадают).

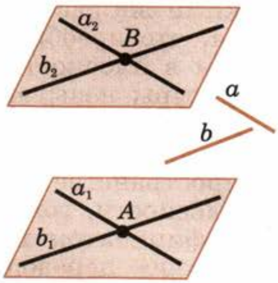


Рис. 78

Выполним параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку B. Так как при параллельном переносе каждая прямая переходит либо в себя, либо в параллельную прямую, то указанный параллельный перенос переводит прямую a_1 в прямую a_2, а прямую b_1 в прямую b_2. Так как параллельный перенос сохраняет величину угла, то угол между прямыми a_1 и b_1 равен углу между прямыми a_2 и b_2. А это и требовалось доказать.

По данному ранее определению перпендикулярными называются прямые, пересекающиеся под прямым углом. Однако иногда *скрещивающиеся прямые тоже называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°*.

Задача (33).

Докажите, что любая прямая на плоскости, перпендикулярная проекции наклонной на эту плоскость, перпендикулярна и наклонной. И обратно: если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.

Решение.

Пусть AB — перпендикуляр к плоскости α, AC — наклонная и c — прямая в плоскости α, перпендикулярная BC (рис. 79). Проведем через основание C наклонной прямую c_1, параллельную c.

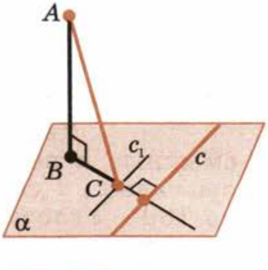


Рис. 79

По теореме о трех перпендикулярах прямая c_1 перпендикулярна наклонной AC. А так как угол между прямой c и наклонной AC равен углу между прямыми AC и c_1, то прямая c тоже перпендикулярна наклонной AC.

Обратно: если прямая c перпендикулярна наклонной AC, то прямая c_1 тоже перпендикулярна ей, а значит, по теореме о трех перпендикулярах и ее проекции BC. Так как $c \parallel c_1$, то $c \perp BC$.

32. Угол между прямой и плоскостью

Определим понятие угла между прямой и плоскостью.

Пусть α — плоскость и a — пересекающая ее прямая, не перпендикулярная плоскости α (рис. 80). Основания перпендикуляров, опущенных из точек прямой a на плоскость α, лежат на прямой a'. Эта прямая называется **проекцией** прямой a на плоскость α.

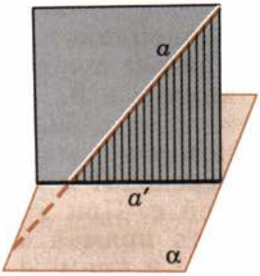


Рис. 80

Углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость.

Если прямая перпендикулярна плоскости, то угол считается равным 90°. Если параллельна, то равным 0°.

Так как прямая a, ее проекция a' на плоскость α и перпендикуляр к плоскости α в точке ее пересечения с прямой a лежат в одной плоскости, то *угол между прямой и плоскостью дополняет до 90° угол между этой прямой и перпендикуляром к плоскости.*

Задача (35).

Точка A отстоит от плоскости на расстояние h. Найдите длины наклонных, проведенных из этой точки под следующими углами к плоскости: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

Решение.

Опустим перпендикуляр AA' на плоскость (рис. 81). Треугольник $AA'B$ прямоугольный с прямым углом при вершине A'. Острый угол этого треугольника, противолежащий катету AA', равен 30° (соответственно 45°, 60°). Поэтому в первом случае наклонная $AB = \frac{AA'}{\sin 30^\circ} = 2h$. Во втором случае $AB = h\sqrt{2}$, в третьем $AB = \frac{2h}{\sqrt{3}}$.

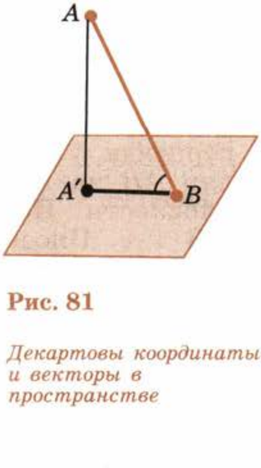


Рис. 81

33. Угол между плоскостями

Определим понятие угла между плоскостями. Угол между параллельными плоскостями считается равным нулю.

Пусть данные плоскости пересекаются. Проведем плоскость, перпендикулярную прямой их пересечения. Она пересекает данные плоскости по двум прямым. Угол между этими прямыми называется **углом между данными плоскостями** (рис. 82).

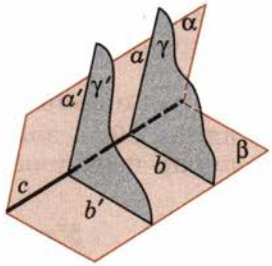


Рис. 82

Определяемый так угол между плоскостями не зависит от выбора секущей плоскости. Докажем это.

Пусть α и β — данные плоскости, пересекающиеся по прямой c. Проведем плоскость γ, перпендикулярную прямой c. Она пересечет плоскости α и β по прямым a и b. Угол между плоскостями α и β равен углу между прямыми a и b.

Возьмем другую секущую плоскость γ', перпендикулярную прямой c. Пусть a' и b' — прямые пересечения этой плоскости с плоскостями α и β.

Выполним параллельный перенос, при котором точка пересечения плоскости γ с прямой c переходит в точку пересечения плоскости γ' с прямой c. При этом по свойству параллельного переноса прямая a переходит в прямую a', а прямая b — в прямую b'.

Это значит, что углы между прямыми a и b, a' и b' равны, что и требовалось доказать.

Задача (43).

Две плоскости пересекаются под углом 30°. Точка A, лежащая в одной из этих плоскостей, отстоит от второй плоскости на расстояние a. Найдите расстояние от этой точки до прямой пересечения плоскостей.

Решение.

Пусть α и β — данные плоскости и A — точка, лежащая в плоскости α (рис. 83). Опустим перпендикуляр AA' на плоскость β и перпендикуляр AB на прямую c, по которой пересекаются плоскости. По теореме о трех перпендикулярах $A'B \perp c$. Плоскость треугольника ABA' перпендикулярна прямой c, и потому угол при вершине B прямоугольного треугольника ABA' равен 30°.

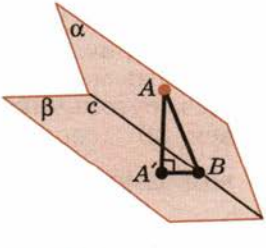


Рис. 83

Имеем:

$$AB = \frac{AA'}{\sin 30^\circ} = a : \frac{1}{2} = 2a.$$

Расстояние от точки A до прямой c равно $2a$.

34. Площадь ортогональной проекции многоугольника

Теорема

4.1

Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению его площади на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.

Доказательство.

Рассмотрим сначала треугольник и его проекцию на плоскость, проходящую через одну из его сторон (рис. 84). Проекцией треугольника ABC является треугольник ABC_1 в плоскости α. Проведем высоту CD треугольника ABC. По теореме о трех перпендикулярах отрезок C_1D — высота треугольника ABC_1. Угол CDC_1 равен углу φ между плоскостью треугольника ABC и плоскостью проекции α. Имеем:

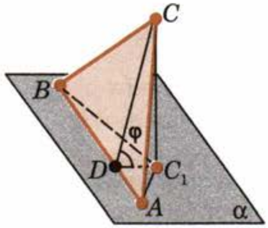


Рис. 84

$$C_1D = CD \cos\varphi,$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD,\ S_{ABC_1} = \frac{1}{2} AB \cdot C_1D.$$

Отсюда

$$S_{ABC_1} = S_{ABC} \cos\varphi.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае теорема верна. Теорема верна и в случае, когда вместо плоскости α взята любая параллельная ей плоскость. Действительно, при проектировании фигуры на параллельные плоскости ее проекции совмещаются параллельным переносом в направлении проектирования. А совмещаемые параллельным переносом фигуры равны.

Рассмотрим теперь общий случай. Разобьем данный многоугольник на треугольники. Каждый треугольник, у которого нет стороны, параллельной плоскости проекции, мы разобьем на два треугольника с общей стороной, параллельной плоскости проекции, как это показано для четырехугольника $ABCD$ на рисунке 85.

Теперь для каждого треугольника $\triangle$ нашего разбиения и его проекции $\triangle'$ запишем равенство $S_{\triangle'} = S_{\triangle} \cos \varphi$. Сложим все эти равенства почленно. Тогда получим слева площадь проекции многоугольника, а справа площадь самого многоугольника, умноженную на $\cos \varphi$. Теорема доказана.

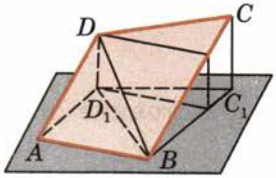


Рис. 85

35. Векторы в пространстве

В пространстве, как и на плоскости, **вектором** называется направленный отрезок. Буквально так же, как и на плоскости, определяются основные понятия для векторов в пространстве: абсолютная величина вектора, направление вектора, равенство векторов.

Координатами вектора с началом в точке A_1 $(x_1; y_1; z_1)$ и концом в точке A_2 $(x_2; y_2; z_2)$ называются числа $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$. Так же как и на плоскости, доказывается, что равные векторы имеют соответственно равные координаты и, обратно, векторы с соответственно равными координатами равны. Это дает основание для обозначения вектора его координатами: $\bar{a}$ $(a_1; a_2; a_3)$ или просто $(\overline{a_1; a_2; a_3})$.

Задача (50).

Даны четыре точки A $(2; 7; -3)$, B $(1; 0; 3)$, C $(-3; -4; 5)$, D $(-2; 3; -1)$. Укажите среди векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$ равные векторы.

Решение.

Надо найти координаты указанных векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ... и сравнить соответствующие координаты. У равных векторов соответствующие координаты равны. Например, у вектора $\overline{AB}$ координаты: $1 - 2 = -1$, $0 - 7 = -7$, $3 - (-3) = 6$. У вектора $\overline{DC}$ такие же координаты: $-3 - (-2) = -1$, $-4 - 3 = -7$, $5 - (-1) = 6$. Таким образом, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ равны. Другой парой равных векторов будут $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$.

36. Действия над векторами в пространстве

Так же как и на плоскости, определяются действия над векторами: сложение, умножение на число и скалярное произведение. **Суммой** векторов $\bar{a}$ $(a_1; a_2; a_3)$ и $\bar{b}$ $(b_1; b_2; b_3)$ называется вектор $\bar{c}$ $(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$.

Так же как и на плоскости, доказывается векторное равенство

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Произведением вектора $\bar{a}$ $(a_1; a_2; a_3)$ на число λ называется вектор $\lambda\bar{a} = (\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$.

Так же как и на плоскости, доказывается, что абсолютная величина вектора $\lambda\bar{a}$ равна $|\lambda||\bar{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно направлению вектора $\bar{a}$, если $\lambda < 0$.

Задача (54).

Дан вектор $\bar{a}$ (1; 2; 3). Найдите коллинеарный ему вектор с началом в точке A (1; 1; 1) и концом B на плоскости xy.

Решение.

Координата z точки B равна нулю. Координаты вектора $\overline{AB}$: $x - 1$, $y - 1$, $0 - 1 = -1$. Из коллинеарности векторов $\bar{a}$ и $\overline{AB}$ получаем пропорцию

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = -\frac{1}{3}.$$

Отсюда находим координаты x, y точки B:

$$x = \frac{2}{3},\ y = \frac{1}{3}.$$

Скалярным произведением векторов $(a_1; a_2; a_3)$ и $(b_1; b_2; b_3)$ называется число $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Буквально так же, как и на плоскости, доказывается, что скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между векторами.

Задача (59).

Даны четыре точки A (0; 1; −1), B (1; −1; 2), C (3; 1; 0), D (2; −3; 1). Найдите косинус угла φ между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

Решение.

Координатами вектора $\overline{AB}$ будут

$$1 - 0 = 1,\ -1 - 1 = -2,\ 2 - (-1) = 3;$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

Координатами вектора $\overline{CD}$ будут

$$2 - 3 = -1,\ -3 - 1 = -4,\ 1 - 0 = 1;$$

$$|\overline{CD}| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{18}.$$

Значит, $\cos\varphi = \dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{CD}|} = \dfrac{1(-1) + (-2)(-4) + 3\cdot 1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{18}} = \dfrac{5}{\sqrt{63}}$.

37. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам

Так же как и на плоскости, два отличных от нуля вектора в пространстве называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Как и на плоскости доказывается, что если вектор $\overline{b}$ коллинеарен вектору $\overline{a}$ или равен нулевому вектору, то $\overline{b} = \lambda\overline{a}$, где λ — некоторое число.

Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ — отличные от нуля неколлинеарные векторы с общим началом O, лежащие в одной плоскости α (рис. 86, *а*). Докажем, что вектор $\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$.

Проведем через точку C, являющуюся концом вектора $\overline{c}$, прямую в плоскости α, параллельную вектору $\overline{a}$. Она пересечет прямую, на которой лежит вектор $\overline{b}$, в точке B. Имеем:

$$\overline{OC} = \overline{OB} + \overline{BC}.$$

Так как векторы $\overline{a}$ и $\overline{BC}$ коллинеарны, то $\overline{BC} = \lambda\overline{a}$. Так как векторы $\overline{b}$ и $\overline{OB}$ коллинеарны, то $\overline{OB} = \mu\overline{b}$. Таким образом, $c^{-} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$, что и требовалось доказать.

Три ненулевых вектора в пространстве называются **компланарными**, если равные им векторы с общим началом лежат в одной плоскости. Докажем, что

в пространстве любой вектор $\overline{d}$ разлагается по трем некомпланарным векторам $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, причем это разложение единственное.

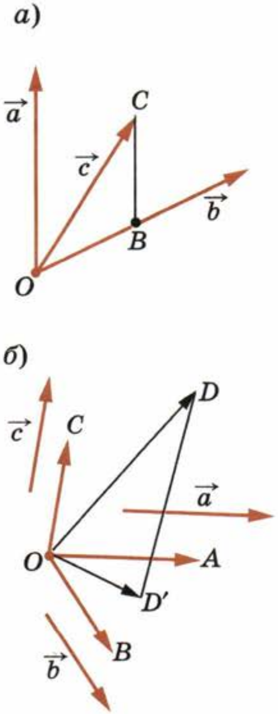


Рис. 86

Отложим от произвольной точки O четыре вектора $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ и $\overline{OD}$, равные данным векторам $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и $\overline{d}$ соответственно, и обозначим через α плоскость, в которой лежат векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ (рис. 86, *б*). Если точка D лежит на прямой OC, то $\overline{OD} = \nu\overline{OC}$. Отсюда, $\overline{d} = \nu\overline{c}$.

Если точка D не лежит на прямой OC, то проведем через нее прямую, параллельную OC. Она пересечет плоскость α в некоторой точке D'. Векторы $\overline{OC}$ и $\overline{D'D}$ коллинеарны. Поэтому $\overline{D'D} = \nu\overline{OC}$. Вектор $\overline{OD'}$ лежит по построению в одной плоскости с векторами $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$. По доказанному выше $\overline{OD'} = \lambda\overline{OA} + \mu\overline{OB}$. Так как $\overline{OD} = \overline{OD'} + \overline{D'D}$, то

$$\overline{OD} = \lambda\overline{OA} + \mu\overline{OB} + \nu\overline{OC},$$

или

$$\overline{d} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} + \nu\overline{c}.$$

Существование разложения доказано. Докажем его единственность. Допустим, что существует другое разложение

$$\overline{d} = \lambda'\overline{a} + \mu'\overline{b} + \nu'\overline{c}.$$

Тогда, вычитая почленно эти разложения, получим

$$(\lambda - \lambda')\overline{a} + (\mu - \mu')\overline{b} + (\nu - \nu')\overline{c} = 0.$$

Умножая скалярно это равенство на вектор $\overline{e}$, перпендикулярный векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, получим

$$(\nu - \nu')(\overline{c} \cdot \overline{e}) = 0.$$

Так как векторы $\overline{c}$ и $\overline{e}$ не перпендикулярны (вектор $\overline{c}$ по предположению не параллелен плоскости α), то $\overline{c} \cdot \overline{e} \neq 0$, а значит, $\nu - \nu' = 0$. Аналогично доказывается, что $\lambda - \lambda' = 0$, $\mu - \mu' = 0$. Тем самым доказана и единственность разложения.

38. Уравнение плоскости

Составим уравнение плоскости. Пусть $A_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ — какая-нибудь точка плоскости и $\overline{n}(a;\ b;\ c)$ вектор, перпендикулярный плоскости (рис. 87). Пусть $A(x;\ y;\ z)$ — произвольная точка плоскости. Векторы $\overline{A_0A}$ и $\overline{n}$ перпендикулярны. Поэтому их скалярное произведение равно нулю. И так как координаты вектора $\overline{A_0A}$ равны $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, то $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

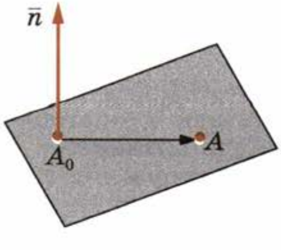


Рис. 87

Обратно, если точка $A(x;\ y;\ z)$ удовлетворяет этому уравнению, то $\overline{A_0A} \cdot \overline{n} = 0$. Значит, точка A лежит в плоскости. Таким образом, выведенное уравнение есть уравнение плоскости.

Заметим, что

коэффициенты a, b, c в уравнении плоскости

$$ax + by + cz + d = 0$$

являются координатами вектора, перпендикулярного плоскости.

Если уравнение плоскости разделить на число, равное длине вектора $|\overline{n}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, то получим уравнение плоскости в нормальной форме, с помощью которого легко вывести формулу для расстояния h от любой точки $A(x;\ y;\ z)$ пространства до плоскости $ax + by + cz + d = 0$. Для этого достаточно в левую часть ее нормального уравнения подставить координаты точки A:

$$h = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Это следует из того, что расстояние от точки A до плоскости равно длине перпендикуляра AB, опущенного из нее на плоскость. Поэтому если основание перпендикуляра B имеет координаты x_0, y_0, z_0, то $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$, и, значит,

$$\frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} =$$

$$= \frac{\overline{n} \cdot \overline{BA}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \pm h.$$

Знак «+» надо брать, когда $\overline{n}$ и $\overline{BA}$ — одинаково направленные векторы, а знак «−» — когда эти векторы противоположно направленные.

Контрольные вопросы

1. Объясните, как определяются координаты точки в пространстве.
2. Выразите расстояние между двумя точками через координаты этих точек.
3. Выведите формулы для координат середины отрезка через координаты его концов.
4. Что такое преобразование симметрии относительно точки? Какая фигура называется центрально-симметричной?
5. Объясните, что такое преобразование симметрии относительно плоскости. Что такое плоскость симметрии фигуры?
6. Какое преобразование фигуры называется движением?
7. Докажите, что движение в пространстве переводит плоскость в плоскость.
8. Какие фигуры в пространстве называются равными?
9. Дайте определение параллельного переноса.
10. Перечислите свойства параллельного переноса.
11. Докажите, что при параллельном переносе в пространстве каждая плоскость переходит либо в себя, либо в параллельную плоскость.
12. Что такое преобразование подобия? Перечислите его свойства.
13. Какое преобразование называется гомотетией? Докажите, что преобразование гомотетии в пространстве переводит любую плоскость, не проходящую через центр гомотетии, в параллельную плоскость (или в себя).
14. Дайте определение угла между скрещивающимися прямыми.
15. Дайте определение угла между прямой и плоскостью.
16. Дайте определение угла между плоскостями.
17. Докажите, что площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению его площади на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью его проекции.
18. Что такое абсолютная величина вектора? Какие векторы называются одинаково направленными?
19. Дайте определение координат вектора с началом в точке $A_1\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ и концом в точке $A_2\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$.
20. Дайте определение действий над векторами: сложения, умножения на число, скалярного произведения.
21. Какие векторы в пространстве называются коллинеарными, компланарными?
22. Докажите, что любой вектор в пространстве можно разложить по трем некомпланарным векторам.
23. Выведите уравнение плоскости.

24. Какой геометрический смысл имеют коэффициенты a, b, c в уравнении плоскости $ax + by + cz + d = 0$?

25. По какой формуле вычисляется расстояние h от точки $A(x;\ y;\ z)$ до плоскости, задаваемой уравнением $ax + by + cz + d = 0$?

Задачи

Пункт 23

1. Где лежат те точки пространства, для которых координаты x и y равны нулю?

2. Даны точки $A\ (1;\ 2;\ 3)$, $B\ (0;\ 1;\ 2)$, $C\ (0;\ 0;\ 3)$, $D\ (1;\ 2;\ 0)$. Какие из этих точек лежат: 1) в плоскости xy; 2) на оси z; 3) в плоскости yz?

3. Дана точка $A\ (1;\ 2;\ 3)$. Найдите основания перпендикуляров, опущенных из этой точки на координатные оси и координатные плоскости.

Пункт 24

4. Найдите расстояния от точки $(1;\ 2;\ -3)$ до: 1) координатных плоскостей; 2) осей координат; 3) начала координат.

5. В плоскости xy найдите точку $D\ (x;\ y;\ 0)$, равноудаленную от трех данных точек: $A\ (0;\ 1;\ -1)$, $B\ (-1;\ 0;\ 1)$, $C\ (0;\ -1;\ 0)$.

6. Найдите точки, равноотстоящие от точек $(0;\ 0;\ 1)$, $(0;\ 1;\ 0)$, $(1;\ 0;\ 0)$ и отстоящие от плоскости yz на расстояние 2.

7. На оси x найдите точку $C\ (x;\ 0;\ 0)$, равноудаленную от двух точек $A\ (1;\ 2;\ 3)$, $B\ (-2;\ 1;\ 3)$.

8. Составьте уравнение геометрического места точек пространства, равноудаленных от точки $A\ (1;\ 2;\ 3)$ и начала координат.

Пункт 25

9. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A\ (1;\ 3;\ 2)$, $B\ (0;\ 2;\ 4)$, $C\ (1;\ 1;\ 4)$, $D\ (2;\ 2;\ 2)$ является параллелограммом.

10. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, если: 1) $A\ (0;\ 2;\ -3)$, $B\ (-1;\ 1;\ 1)$, $C\ (2;\ -2;\ -1)$, $D\ (3;\ -1;\ -5)$; 2) $A\ (2;\ 1;\ 3)$, $B\ (1;\ 0;\ 7)$, $C\ (-2;\ 1;\ 5)$, $D\ (-1;\ 2;\ 1)$.

11. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является ромбом, если: 1) $A\ (6;\ 7;\ 8)$, $B\ (8;\ 2;\ 6)$, $C\ (4;\ 3;\ 2)$, $D\ (2;\ 8;\ 4)$; 2) $A\ (0;\ 2;\ 0)$, $B\ (1;\ 0;\ 0)$, $C\ (2;\ 0;\ 2)$, $D\ (1;\ 2;\ 2)$.

12. Даны один конец отрезка $A\ (2;\ 3;\ -1)$ и его середина $C\ (1;\ 1;\ 1)$. Найдите другой конец отрезка $B\ (x;\ y;\ z)$.

13. Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если координаты трех других его вершин известны: 1) A (2; 3; 2), B (0; 2; 4), C (4; 1; 0); 2) A (1; −1; 0), B (0; 1; −1), C (−1; 0; 1); 3) A (4; 2; −1), B (1; −3; 2), C (−4; 2; 1).

14. Докажите, что середина отрезка с концами в точках A $(a; c; -b)$ и B $(-a; d; b)$ лежит на оси y.

15. Докажите, что середина отрезка с концами в точках C $(a; b; c)$ и D $(p; q; -c)$ лежит в плоскости xy.

Пункт 26

16. Докажите, что преобразование симметрии относительно координатной плоскости xy задается формулами $x' = x$, $y' = y$, $z' = -z$.

17. Даны точки (1; 2; 3), (0; −1; 2), (1; 0; −3). Найдите точки, симметричные данным относительно координатных плоскостей.

18. Даны точки (1; 2; 3), (0; −1; 2), (1; 0; −3). Найдите точки, симметричные им относительно начала координат.

Пункт 28

19. Докажите, что преобразование симметрии относительно точки есть движение.

20. Докажите, что преобразование симметрии относительно плоскости есть движение.

21. Докажите, что при движении в пространстве круг переходит в круг того же радиуса.

22. Докажите, что при движении в пространстве три точки, лежащие на прямой, переходят в три точки, также лежащие на одной прямой.

Пункт 29

23. Найдите значения a, b, c в формулах параллельного переноса $x' = x + a$, $y' = y + b$, $z' = z + c$, если при этом параллельном переносе точка A (1; 0; 2) переходит в точку A' (2; 1; 0).

24. При параллельном переносе точка A (2; 1; −1) переходит в точку A' (1; −1; 0). В какую точку переходит начало координат?

25. Существует ли параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку B, а точка C — в точку D, если:
1) A (2; 1; 0), B (1; 0; 1), C (3; −2; 1), D (2; −3; 0);
2) A (−2; 3; 5), B (1; 2; 4), C (4; −3; 6), D (7; −2; 5);
3) A (0; 1; 2), B (−1; 0; 1), C (3; −2; 2), D (2; −3; 1);
4) A (1; 1; 0), B (0; 0; 0), C (−2; 2; 1), D (1; 1; 1)?

26. Докажите, что при параллельном переносе параллелограмм переходит в равный ему параллелограмм.

27. Четыре параллельные прямые пересекают параллельные плоскости в вершинах параллелограммов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно. Докажите, что параллелограммы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ совмещаются параллельным переносом.

Пункт 30

28. Докажите, что преобразование гомотетии в пространстве является преобразованием подобия.

29. Три прямые, проходящие через точку S, пересекают данную плоскость в точках A, B, C, а параллельную ей плоскость в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотетичны.

Пункт 31

30. Прямая a лежит в плоскости α, а прямая b перпендикулярна этой плоскости. Чему равен угол между прямыми a и b?

31. Даны три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Чему равен угол между прямыми CA и CB, если эти прямые образуют углы α и β с прямой AB и $\alpha + \beta < 90°$?

32. Прямые a, b, c параллельны одной и той же плоскости. Чему равен угол между прямыми b и c, если углы этих прямых с прямой a равны $60°$ и $80°$?

33. Докажите, что любая прямая на плоскости, перпендикулярная проекции наклонной на эту плоскость, перпендикулярна и наклонной. И обратно: если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.

34. 1) Докажите, что прямая, пересекающая параллельные плоскости, пересекает их под равными углами.

2) Докажите, что плоскость, пересекающая параллельные прямые, пересекает их под равными углами.

35. Точка A отстоит от плоскости на расстояние h. Найдите длины наклонных, проведенных из этой точки под следующими углами к плоскости: 1) $30°$; 2) $45°$; 3) $60°$.

36. Наклонная равна a. Чему равна проекция этой наклонной на плоскость, если наклонная составляет с плоскостью угол, равный: 1) $45°$; 2) $60°$; 3) $30°$?

37. Отрезок длиной 10 м пересекает плоскость, концы его находятся на расстояниях 2 м и 3 м от плоскости. Найдите угол между данным отрезком и плоскостью.

38. Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние a, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы 45° и 30°, а между собой прямой угол. Найдите расстояние между концами наклонных.

39. Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние a, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы 45°, а между собой угол 60°. Найдите расстояние между концами наклонных.

40. Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние a, проведены две наклонные под углом 30° к плоскости, причем их проекции образуют угол 120°. Найдите расстояние между концами наклонных.

41. Через катет равнобедренного прямоугольного треугольника проведена плоскость под углом 45° ко второму катету. Найдите угол между гипотенузой и плоскостью.

Пункт 33

42. Докажите, что плоскость, пересекающая параллельные плоскости, пересекает их под равными углами.

43. Две плоскости пересекаются под углом 30°. Точка A, лежащая в одной из этих плоскостей, отстоит от другой плоскости на расстояние a. Найдите расстояние от этой точки до прямой пересечения плоскостей.

44. Найдите угол между плоскостями, если точка, взятая на одной из них, отстоит от прямой пересечения плоскостей вдвое дальше, чем от второй плоскости.

45. Два равнобедренных треугольника имеют общее основание, а их плоскости образуют угол 60°. Общее основание равно 16 м, боковая сторона одного треугольника 17 м, а боковые стороны другого перпендикулярны. Найдите расстояние между вершинами треугольников.

46. Равнобедренные треугольники ABC и ABD с общим основанием AB лежат в различных плоскостях, угол между которыми равен α. Найдите $\cos \alpha$, если:

1) $AB = 24$ см, $AC = 13$ см, $AD = 37$ см, $CD = 35$ см;

2) $AB = 32$ м, $AC = 65$ м, $AD = 20$ м, $CD = 63$ м.

47. Катеты прямоугольного треугольника равны 7 м и 24 м. Найдите расстояние от вершины прямого угла до плоскости, которая проходит через гипотенузу и составляет угол 30° с плоскостью треугольника.

Пункт 34

48. Дан равносторонний треугольник со стороной a. Найдите площадь его ортогональной проекции на плоскость, которая образует с плоскостью треугольника угол, равный: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

49. 1) Найдите площадь ортогональной проекции треугольника ABC из задачи 46 на плоскость треугольника ABD.
2) Найдите площадь ортогональной проекции треугольника ABD из задачи 46 на плоскость треугольника ABC.

Пункт 35

50. Даны четыре точки A (2; 7; −3), B (1; 0; 3), C (−3; −4; 5), D (−2; 3; −1). Укажите среди векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$ равные векторы.

51. Даны три точки A (1; 0; 1), B (−1; 1; 2), C (0; 2; −1). Найдите точку D (x; y; z), если векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны.

Пункт 36

52. Найдите точку D в задаче 51, если сумма векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равна нулю.

53. Даны векторы $(\overline{2;\ n;\ 3})$ и $(\overline{3;\ 2;\ m})$. При каких m и n эти векторы коллинеарны?

54. Дан вектор $\bar{a}$ (1; 2; 3). Найдите коллинеарный ему вектор с началом в точке A (1; 1; 1) и концом B на плоскости xy.

55. При каком значении n данные векторы перпендикулярны: 1) $\bar{a}$ (2; −1; 3), $\bar{b}$ (1; 3; n); 2) $\bar{a}$ (n; −2; 1), $\bar{b}$ (n; −n; 1); 3) $\bar{a}$ (n; −2; 1), $\bar{b}$ (n; 2n; 4); 4) $\bar{a}$ (4; 2n; −1), $\bar{b}$ (−1; 1; n)?

56. Даны три точки A (1; 0; 1), B (−1; 1; 2), C (0; 2; −1). Найдите на оси z такую точку D (0; 0; c), чтобы векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ были перпендикулярны.

57. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол 60°, а вектор $\bar{c}$ им перпендикулярен. Найдите абсолютную величину вектора $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$.

58. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ единичной длины образуют попарно углы 60°. Найдите угол φ между векторами: 1) $\bar{a}$ и $\bar{b} + \bar{c}$; 2) $\bar{a}$ и $\bar{b} - \bar{c}$.

59. Даны четыре точки A (0; 1; −1), B (1; −1; 2), C (3; 1; 0), D (2; −3; 1). Найдите косинус угла φ между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

60. Даны три точки A (0; 1; −1), B (1; −1; 2), C (3; 1; 0). Найдите косинус угла C треугольника ABC.

61. Докажите, что угол φ между прямыми, содержащими векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, определяется из уравнения $|\bar{a}\,\bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos \varphi$.

62. Из вершины прямого угла A треугольника ABC восставлен перпендикуляр AD к плоскости треугольника. Найдите косинус угла φ между векторами $\overline{BC}$ и $\overline{BD}$, если угол ABD равен α, а угол ABC равен β.

63. Наклонная образует угол 45° с плоскостью. Через основание наклонной проведена прямая в плоскости под углом 45° к проекции наклонной. Найдите угол φ между этой прямой и наклонной.

64. Из точки вне плоскости проведены перпендикуляр и две равные наклонные, образующие углы α с перпендикуляром. Найдите угол φ между проекциями наклонных, если угол между наклонными β.

Пункт 38

65. Составьте уравнение плоскости, которая проходит через точку A и перпендикулярна прямой AB, если:
1) $A(-1;\ 1;\ 2)$, $B(2;\ 0;\ 1)$;
2) $A(1;\ 0;\ -1)$, $B(4;\ 6;\ -3)$;
3) $A(3;\ -4;\ 5)$, $B(2;\ 1;\ -3)$.

66. Найдите расстояние от точки $C(6;\ -8;\ 10)$ до плоскостей из предыдущей задачи.

67. Найдите отрезки, которые плоскость $ax + by + cz = d$ отсекает на осях координат, если коэффициенты a, b, c и d не равны нулю.

68. Докажите, что любая плоскость, параллельная плоскости $ax + by + cz + d = 0$, задается уравнением $ax + by + cz + d_1 = 0$, $d_1 \neq d$.

69. Докажите, что плоскости, заданные уравнениями $x + y + z = 1$, $2x + y + 3z + 1 = 0$, $x + 2z + 1 = 0$, не имеют ни одной общей точки.

70. Найдите точку пересечения трех плоскостей, задаваемых уравнениями:
1) $x + y + z = 1$, $x - 2y = 0$, $2x + y + 3z + 1 = 0$;
2) $x - y = 3$, $y + z = 2$, $x - z = 4$;
3) $x + z = 0$, $2x - y = 3$, $3x + y - z = 8$;
4) $x + 2y + 3z = 1$, $3x + y + 2z = 2$, $2x + 3y + z = 3$.

71. При каком условии плоскость, заданная уравнением $ax + by + cz + d = 0$: 1) параллельна оси z; 2) проходит через ось z; 3) перпендикулярна плоскости xz?

§ 5 Многогранники

39. Двугранный угол

Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей ограничивающей их прямой (рис. 88). Полуплоскости называются **гранями**, а ограничивающая их прямая — **ребром** двугранного угла.

Плоскость, перпендикулярная ребру двугранного угла, пересекает его грани по двум полупрямым. Угол, образованный этими полупрямыми, называется **линейным углом** двугранного угла.

За меру двугранного угла принимается мера соответствующего ему линейного угла. Все линейные углы двугранного угла совмещаются параллельным переносом, а значит, равны. Поэтому мера двугранного угла не зависит от выбора линейного угла.

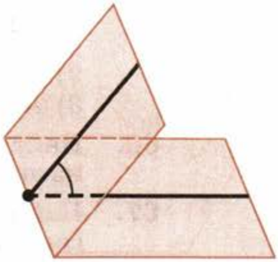


Рис. 88

Задача (1).

Из точек A и B, лежащих в гранях двугранного угла, опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 на ребро угла. Найдите отрезок AB, если $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $A_1B_1 = c$ и двугранный угол равен α (рис. 89).

Решение.

Проведем прямые $A_1C \parallel BB_1$ и $BC \parallel A_1B_1$. Четырехугольник A_1B_1BC — параллелограмм, значит, $A_1C = BB_1 = b$. Прямая A_1B_1 перпендикулярна плоскости треугольника AA_1C, так как она перпендикулярна двум прямым AA_1 и CA_1 в этой плоскости.

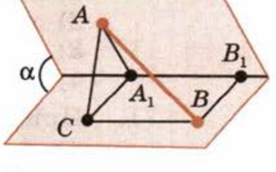


Рис. 89

Следовательно, параллельная ей прямая BC тоже перпендикулярна этой плоскости. Значит, треугольник ABC — прямоугольный с прямым углом C. По теореме косинусов

$$AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 - 2AA_1 \cdot A_1C \cdot \cos\alpha = \\ = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha.$$

По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha + c^2}.$$

40. Трехгранный и многогранный углы

Рассмотрим три луча a, b, c, исходящие из одной точки и не лежащие в одной плоскости. **Трехгранным углом** (abc) называется фигура, составленная из трех плоских углов (ab), (bc) и (ac) (рис. 90). Эти углы называются **гранями** трехгранного угла, а их стороны — **ребрами**. Общая вершина плоских углов называется **вершиной** трехгранного угла. Двугранные углы, образованные гранями трехгранного угла, называются **двугранными углами трехгранного угла.**

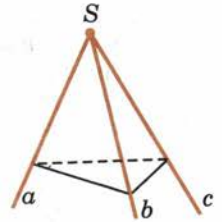


Рис. 90

Аналогично определяется понятие многогранного угла (рис. 91).

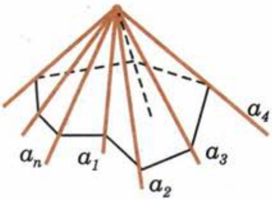


Рис. 91

Задача (2).

У трехгранного угла (abc) двугранный угол при ребре c прямой, двугранный угол при ребре b равен φ, а плоский угол (bc) равен $\gamma\left(\varphi, \gamma < \frac{\pi}{2}\right)$. Найдите другие плоские углы: $\alpha = \angle(ab)$, $\beta = \angle(ac)$.

Решение.

Опустим из произвольной точки A ребра a перпендикуляр AB на ребро b и перпендикуляр AC на ребро c (рис. 92). По теореме о трех перпендикулярах CB — перпендикуляр к ребру b.

Из прямоугольных треугольников OAB, OCB, AOC и ABC получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha = AB : OB = \frac{BC}{\cos\varphi} : \frac{BC}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\varphi},$$

$$\operatorname{tg}\beta = AC : OC = BC\operatorname{tg}\varphi : \frac{BC}{\sin\gamma} = \operatorname{tg}\varphi\sin\gamma.$$

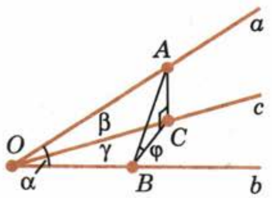


Рис. 92

Замечание.

Полученные зависимости между углами α, β, γ, φ: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\varphi}$, $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\varphi \sin\gamma$ — позволяют, зная два угла, найти два других.

41. Многогранник

В стереометрии изучаются фигуры в пространстве, называемые телами. Наглядно (геометрическое) тело надо представлять себе как часть пространства, занятую физическим телом и ограниченную поверхностью.

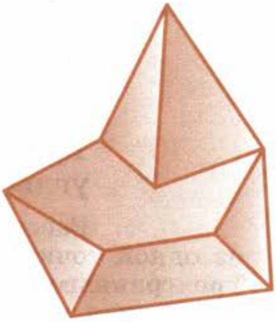


Рис. 93

Многогранник — это такое тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников (рис. 93). Многогранник называется **выпуклым**, если он расположен по одну сторону плоскости каждого плоского многоугольника на его поверхности. Общая часть такой плоскости и поверхности выпуклого многогранника называется **гранью**. Грани выпуклого многогранника являются плоскими выпуклыми многоугольниками. Стороны граней называются **ребрами многогранника**, а вершины — **вершинами многогранника**.

Из плоских многоугольников, являющихся гранями данного многогранника, можно склеить его модель. Но для этого надо знать, какие их стороны склеиваются одна с другой, образуя при этом ребра многогранника. **Разверткой** многогранника называется совокупность плоских многоугольников, равных его граням, для которых указано, как их склеивать друг с другом по сторонам и вершинам. Упоминание вершин при этом совсем не лишне, так как два многоугольника можно склеить по общей стороне двумя различными способами.

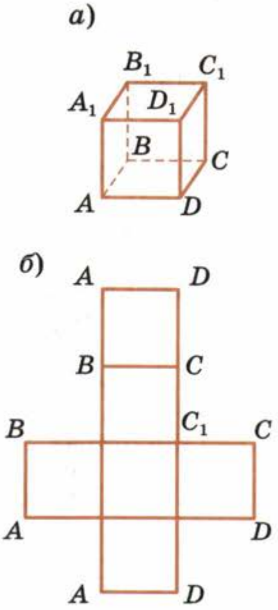


Рис. 94

Поясним сказанное на примере знакомого вам куба (рис. 94, *а*). Куб есть выпуклый многогранник. Его поверхность состоит из шести квадратов: $ABCD$, ABB_1A_1, ... Они являются его гранями. Ребрами куба являются стороны этих квадратов: AB, BC, AA_1, ... Вершинами куба являются вершины квадратов: A, B, C, D, A_1, B_1, ... У куба шесть граней, двенадцать ребер и восемь вершин. На рисунке 94, *б* показана крестообразная развертка куба, изображенного на рисунке 94, *а*, причем на ней часть сторон, подлежащих склейке, уже совмещены, а остальные склеиваемые стороны и вершины обозначены одинаковыми буквами. При этом окрестность вершины C_1 состоит из одного угла развертки (который равен сумме трех прямых углов), а окрестность вершины A — из трех углов (каждый из которых равен прямому углу).

Простейшим многогранникам — призмам и пирамидам, которые будут основным объектом нашего изучения, — мы дадим такие определения, которые, по существу, не используют понятие тела. Они будут определены как геометрические фигуры с указанием всех принадлежащих им точек пространства. Понятие геометрического тела и его поверхности в общем случае будет дано позже.

42. Призма

Призмой называется многогранник, который состоит из двух плоских многоугольников, лежащих в разных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников (рис. 95). Многоугольники называются **основаниями призмы**, а отрезки, соединяющие соответствующие вершины, — **боковыми ребрами призмы.**

Так как параллельный перенос есть движение, то

основания призмы равны.

Так как при параллельном переносе плоскость переходит в параллельную плоскость (или в себя), то

у призмы основания лежат в параллельных плоскостях.

Так как при параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние, то

у призмы боковые ребра параллельны и равны.

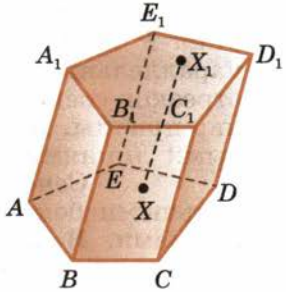


Рис. 95

Поверхность призмы состоит из оснований и боковой поверхности.

Боковая поверхность состоит из параллелограммов. У каждого из этих параллелограммов две стороны являются соответствующими сторонами оснований, а две другие — соседними боковыми ребрами.

Высотой призмы называется расстояние между плоскостями ее оснований.

Отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани, называется **диагональю призмы.**

Призма называется n-угольной, если ее основания — n-угольники.

В дальнейшем мы будем рассматривать только призмы, у которых основания — выпуклые многоугольники. Такие призмы являются выпуклыми многогранниками.

На рисунке 95 изображена пятиугольная призма. У нее основаниями являются пятиугольники $ABCDE$, $A_1B_1C_1D_1E_1$. XX_1 — отрезок, соединяющий соответствующие точки оснований. Боковые ребра призмы — отрезки AA_1, BB_1, ..., EE_1. Боковые грани призмы — параллелограммы ABB_1A_1, BCC_1B_1, ...

43. Изображение призмы и построение ее сечений

В соответствии с правилами параллельного проектирования изображение призмы строится следующим образом. Сначала строится одно из оснований P (рис. 96). Это будет некоторый плоский многоугольник. Затем из вершин многоугольника P проводятся боковые ребра призмы в виде параллельных отрезков равной длины. Концы этих отрезков соединяются, и получается другое основание призмы. Невидимые ребра проводятся штриховыми линиями.

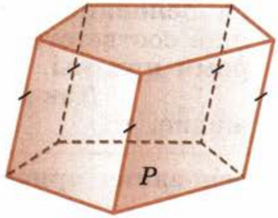


Рис. 96

Сечения призмы плоскостями, параллельными боковым ребрам, являются параллелограммами. В частности, параллелограммами являются диагональные сечения. Это сечения плоскостями, проходящими через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани (рис. 97).

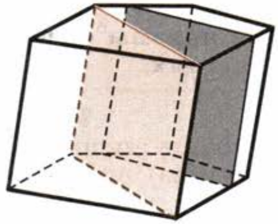


Рис. 97

На практике, в частности, при решении задач часто приходится строить сечение призмы плоскостью, проходящей через заданную прямую g на плоскости одного из оснований призмы. Такая прямая называется **следом** секущей плоскости на плоскости основания. Для построения сечения призмы достаточно построить отрезки пересечения секущей плоскости с гранями призмы. Покажем, как строится такое сечение, если известна какая-нибудь точка A на поверхности призмы, принадлежащая сечению (рис. 98).

Если данная точка A принадлежит другому основанию призмы, то его пересечение с секущей плоскостью представляет собой отрезок BC, параллельный следу g и содержащий данную точку A (рис. 98, *а*).

Если данная точка A принадлежит боковой грани, то пересечение этой грани с секущей плоскостью строится, как показано на рисунке 98, *б*. Именно: сначала строится точка D, в которой плоскость грани пересекает заданный след g. Затем проводится прямая через точки A и D. Отрезок BC прямой AD на рассматриваемой грани и есть пересечение этой грани с секущей плоскостью. Если грань, содержащая точку A, параллельна следу g, то секущая плоскость пересекает эту грань по отрезку BC, проходящему через точку A и параллельному прямой g.

Концы отрезка BC принадлежат и соседним граням. Поэтому описанным способом можно построить пересечение этих граней с нашей секущей плоскостью. И т. д.

На рисунке 99 показано построение сечения четырехугольной призмы плоскостью, проходящей через прямую a в плоскости нижнего основания призмы и точку A на одном из боковых ребер.

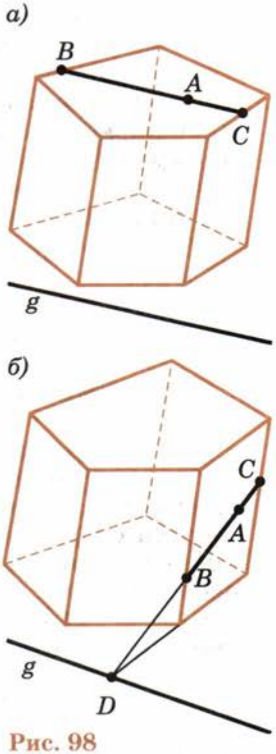


Рис. 98

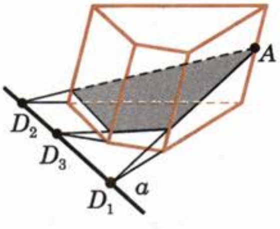


Рис. 99

44. Прямая призма

Призма называется **прямой**, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям. В противном случае призма называется **наклонной**.

У прямой призмы боковые грани являются прямоугольниками. При изображении прямой призмы на рисунке боковые ребра обычно проводят вертикально (рис. 100).

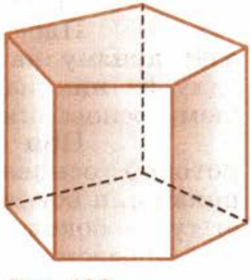


Рис. 100

Прямая призма называется **правильной,** если ее основания являются правильными многоугольниками.

Боковой поверхностью призмы (точнее, площадью боковой поверхности) называется сумма площадей боковых граней.

Полная поверхность призмы равна сумме боковой поверхности и площадей оснований.

Теорема

5.1

Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы, т. е. на длину бокового ребра.

Доказательство.

Боковые грани прямой призмы — прямоугольники. Основания этих прямоугольников являются сторонами многоугольника, лежащего в основании призмы, а высоты равны длине боковых ребер призмы.

Отсюда следует, что боковая поверхность призмы равна

$$S = a_1 l + a_2 l + \dots + a_n l = pl,$$

где $a_1, \dots, a_n$ — длины ребер основания, p — периметр основания призмы, а l — длина боковых ребер. Теорема доказана.

Задача (22).

В наклонной призме проведено сечение, перпендикулярное боковым ребрам и пересекающее все боковые ребра. Найдите боковую поверхность призмы, если периметр сечения равен p, а боковые ребра равны l.

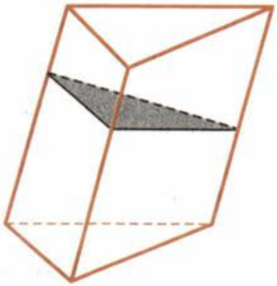


Рис. 101

Решение.

Плоскость проведенного сечения разбивает призму на две части (рис. 101). Подвергнем одну из них параллельному переносу, совмещающему основания призмы.

При этом получим прямую призму, у которой основанием служит сечение исходной призмы, а боковые ребра равны l. Эта призма имеет ту же боковую поверхность, что и исходная. Таким образом, боковая поверхность исходной призмы равна pl.

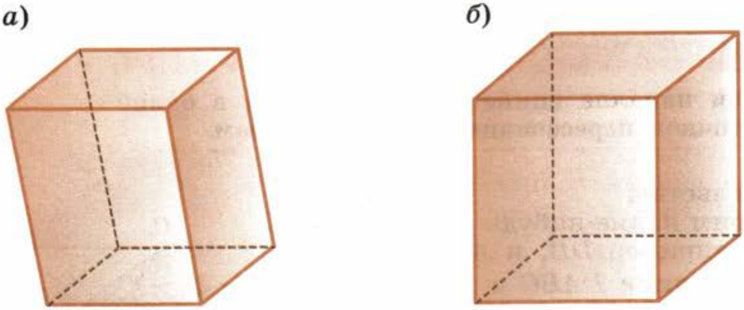


Рис. 102

45. Параллелепипед

Если основание призмы есть параллелограмм, то она называется **параллелепипедом.** У параллелепипеда все грани — параллелограммы.

На рисунке 102, *а* изображен наклонный параллелепипед, а на рисунке 102, *б* — прямой параллелепипед.

Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются **противолежащими.**

Теорема 5.2

У параллелепипеда противолежащие грани параллельны и равны.

Доказательство.

Рассмотрим какие-нибудь две противолежащие грани параллелепипеда, например ADD_1A_1 и CBB_1C_1 (рис. 103). Так как все грани параллелепипеда — параллелограммы, то прямая AD параллельна прямой BC, а прямая AA_1 параллельна прямой DD_1. Отсюда следует, что плоскости рассматриваемых граней параллельны.

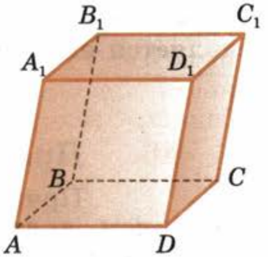


Рис. 103

Из того, что грани параллелепипеда — параллелограммы, следует, что отрезки AB, A_1B_1, D_1C_1 и DC параллельны и равны. Отсюда заключаем, что грань ADD_1A_1 совмещается параллельным переносом вдоль ребра AB с гранью CBB_1C_1. Значит, эти грани равны.

Аналогично доказывается параллельность и равенство любых других противолежащих граней параллелепипеда. Теорема доказана.

Теорема

5.3

Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.

Доказательство.

Рассмотрим какие-нибудь две диагонали параллелепипеда, например DB_1 и AC_1 (рис. 104). Так как четырехугольники $DABC$ и BB_1C_1C — параллелограммы с общей стороной BC, то их стороны AD и B_1C_1 параллельны друг другу, а значит, лежат в одной плоскости. Эта плоскость пересекает плоскости противолежащих граней параллелепипеда по параллельным прямым AB_1 и DC_1. Следовательно, четырехугольник DAB_1C_1 — параллелограмм. Диагонали параллелепипеда DB_1 и AC_1 являются диагоналями этого параллелограмма. Поэтому они пересекаются и точкой пересечения O делятся пополам.

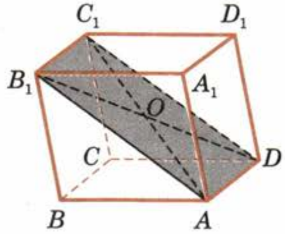


Рис. 104

Аналогично доказывается, что диагонали BD_1 и AC_1, а также диагонали AC_1 и CA_1 пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Отсюда заключаем, что все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам. Теорема доказана.

Из теоремы 5.3 следует, что

точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.

46. Прямоугольный параллелепипед

Прямой параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник, называется **прямоугольным параллелепипедом.** У прямоугольного параллелепипеда все грани — прямоугольники.

Прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны, называется **кубом.**

Длины непараллельных ребер прямоугольного параллелепипеда называются его **линейными размерами (измерениями).** У прямоугольного параллелепипеда три измерения.

Теорема

5.4

В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трех его измерений.

Доказательство.

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 105). Из прямоугольного треугольника AC_1C по теореме Пифагора получаем

$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2.$$

Из прямоугольного треугольника ACB по теореме Пифагора получаем

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

Отсюда

$$AC_1^2 = CC_1^2 + AB^2 + BC^2.$$

Ребра AB, BC и CC_1 не параллельны, а следовательно, их длины являются линейными размерами параллелепипеда. Теорема доказана.

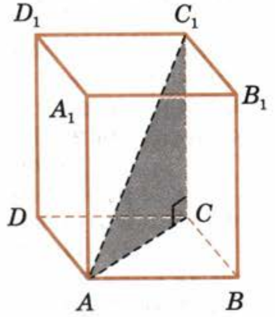


Рис. 105

У прямоугольного параллелепипеда, как у всякого параллелепипеда, есть центр симметрии — точка пересечения его диагоналей.

У прямоугольного параллелепипеда есть также три плоскости симметрии, проходящие через его центр симметрии параллельно граням. На рисунке 106 показана одна из таких плоскостей симметрии параллелепипеда. Она проходит через середины четырех параллельных ребер параллелепипеда. Концы ребер являются симметричными точками.

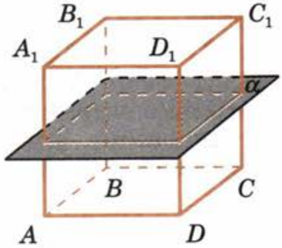


Рис. 106

Если у параллелепипеда все линейные размеры разные, то у него нет других плоскостей симметрии, кроме названных.

Если же у параллелепипеда два линейных размера равны, то у него есть еще две плоскости симметрии. Это плоскости диагональных сечений, показанные на рисунке 107.

Если у параллелепипеда все линейные размеры равны, т. е. он является кубом, то у него плоскость любого диагонального сечения является плоскостью симметрии. Таким образом, у куба девять плоскостей симметрии.

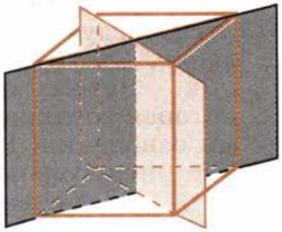


Рис. 107

47. Пирамида

Пирамидой называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника — **основания пирамиды**, точки, не лежащей в плоскости основания, — **вершины пирамиды** и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания (рис. 108).

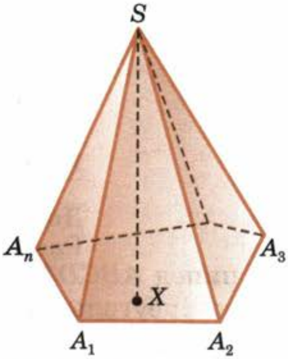


Рис. 108

Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, называются **боковыми ребрами.**

Поверхность пирамиды состоит из основания и боковых граней. Каждая боковая грань — треугольник. Одной из его вершин является вершина пирамиды, а противолежащей стороной — сторона основания пирамиды.

Высотой пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.

Пирамида называется n-угольной, если ее основанием является n-угольник. Треугольная пирамида называется также **тетраэдром.**

У пирамиды, изображенной на рисунке 108, основание — многоугольник $A_1A_2...A_n$, вершина пирамиды — S, боковые ребра — SA_1, SA_2, ..., SA_n, боковые грани — треугольники SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1.

В дальнейшем мы будем рассматривать только пирамиды с выпуклым многоугольником в основании. Такие пирамиды являются выпуклыми многогранниками.

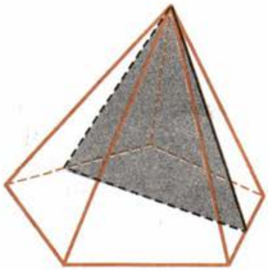


Рис. 109

48. Построение пирамиды и ее плоских сечений

В соответствии с правилами параллельного проектирования изображение пирамиды строится следующим образом. Сначала строится основание. Это будет некоторый плоский многоугольник. Затем отмечается вершина пирамиды, которая соединяется боковыми ребрами с вершинами основания. На рисунке 108 показано изображение пятиугольной пирамиды.

Сечения пирамиды плоскостями, проходящими через ее вершину, представляют собой треугольники (рис. 109). В частности, треугольни-

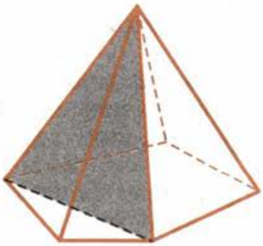


Рис. 110

ками являются **диагональные сечения.** Это сечения плоскостями, проходящими через два несоседних боковых ребра пирамиды (рис. 110).

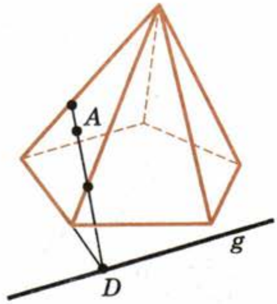


Рис. 111

Сечение пирамиды плоскостью с заданным следом g на плоскости основания строится так же, как и сечение призмы. Для построения сечения пирамиды плоскостью достаточно построить пересечения ее боковых граней с секущей плоскостью.

Если на грани, не параллельной следу g, известна какая-нибудь точка A, принадлежащая сечению, то сначала строится пересечение следа g секущей плоскости с плоскостью этой грани — точка D на рисунке 111. Точка D соединяется с точкой A прямой. Тогда отрезок этой прямой, принадлежащий грани, есть пересечение этой грани с секущей плоскостью.

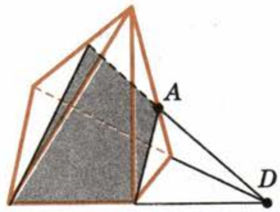


Рис. 112

Если точка A лежит на грани пирамиды, параллельной следу g, то секущая плоскость пересекает эту грань по отрезку, параллельному прямой g. Переходя к соседней боковой грани, строят ее пересечение с секущей плоскостью и т. д. В итоге получается требуемое сечение пирамиды.

На рисунке 112 построено сечение четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания и точку A на одном из ее боковых ребер.

49. Усеченная пирамида

Теорема 5.5

Плоскость, пересекающая пирамиду и параллельная ее основанию, отсекает подобную пирамиду.

Доказательство.

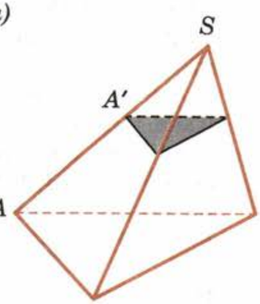
Пусть S — вершина пирамиды, A — вершина основания и A' — точка пересечения секущей плоскости с боковым ребром SA (рис. 113, *а*). Подвергнем пирамиду преобразованию гомотетии относительно вершины S с коэффициентом гомотетии

$$k = \frac{SA'}{SA}.$$

При этой гомотетии плоскость основания переходит в параллельную плоскость, проходящую через точку A', т. е. в секущую плоскость, а следовательно, вся пирамида — в отсекаемую этой плоскостью часть. Так как гомотетия есть преобразование подобия, то отсекаемая часть пирамиды является пирамидой, подобной данной. Теорема доказана.

По теореме 5.5 плоскость, параллельная плоскости основания пирамиды и пересекающая ее боковые ребра, отсекает от нее подобную пирамиду. Другая часть представляет собой многогранник, который называется **усеченной пирамидой** (рис. 113, *б*). Грани усеченной пирамиды, лежащие в параллельных плоскостях, называются **основаниями**; остальные грани называются **боковыми гранями**. Основания усеченной пирамиды представляют собой подобные (более того, гомотетичные) многоугольники, боковые грани — трапеции.

а)



б)

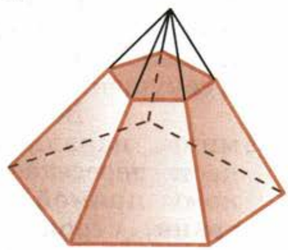


Рис. 113

Задача (54).

Боковое ребро пирамиды разделено на четыре равные части и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию пирамиды. Площадь основания равна 400 см^2. Найдите площади сечений.

Решение.

Сечения подобны основанию пирамиды с коэффициентами подобия $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ и $\frac{3}{4}$. Площади подобных фигур относятся как квадраты линейных размеров. Поэтому отношения площадей сечений к площади основания пирамиды есть $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(\frac{2}{4}\right)^2$ и $\left(\frac{3}{4}\right)^2$. Следовательно, площади сечений равны

$$400 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 25\ (\text{см}^2),$$

$$400 \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^2 = 100\ (\text{см}^2),$$

$$400 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 225\ (\text{см}^2).$$

50. Правильная пирамида

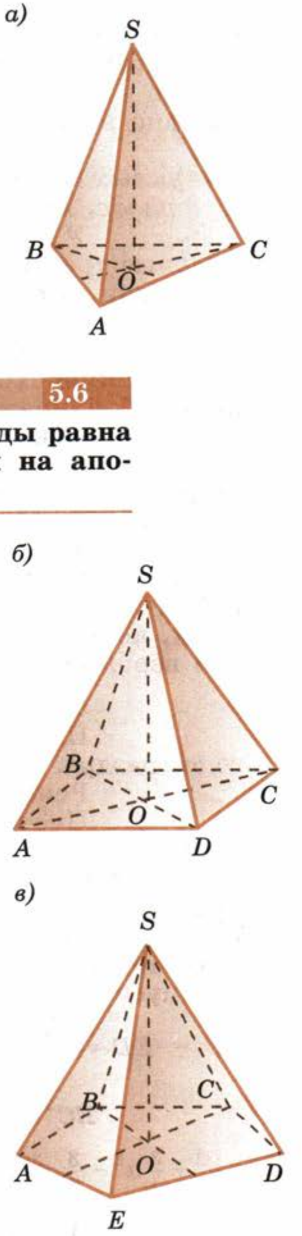


Рис. 114

Пирамида называется **правильной,** если ее основанием является правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника (рис. 114). **Осью** правильной пирамиды называется прямая, содержащая ее высоту. Очевидно, у правильной пирамиды боковые ребра равны; следовательно, боковые грани — равные равнобедренные треугольники.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется **апофемой. Боковой поверхностью пирамиды** называется сумма площадей ее боковых граней.

Теорема

5.6

Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему.

Доказательство.

Если сторона основания a, число сторон n, то боковая поверхность пирамиды равна:

$$\frac{al}{2}n = \frac{anl}{2} = \frac{pl}{2},$$

где l — апофема, а p — периметр основания пирамиды. Теорема доказана.

Усеченная пирамида, которая получается из правильной пирамиды, также называется **правильной**. Боковые грани правильной усеченной пирамиды — равные равнобокие трапеции; их высоты называются **апофемами**.

Задача (69).

Докажите, что боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему.

Решение.

Боковые грани усеченной пирамиды — трапеции с одним и тем же верхним основанием a, нижним b и высотой (апофемой) l. Поэтому площадь одной грани равна $\frac{1}{2}(a+b)l$. Площадь всех граней, т. е. боковая поверхность, равна $\frac{1}{2}(an+bn)l$, где n — число вершин у основания пирамиды, an и bn — периметры оснований пирамиды.

51. Правильные многогранники

Выпуклый многогранник называется **правильным**, если его грани являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число ребер.

Существует пять типов правильных выпуклых многогранников (рис. 115): *правильный тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.*

У правильного тетраэдра грани — правильные треугольники; в каждой вершине сходится по три ребра. Тетраэдр представляет собой треугольную пирамиду, у которой все ребра равны.

У куба все грани — квадраты; в каждой вершине сходится по три ребра. Куб представляет собой прямоугольный параллелепипед с равными ребрами.

У октаэдра грани — правильные треугольники, но в отличие от тетраэдра в каждой его вершине сходится по четыре ребра.

У додекаэдра грани — правильные пятиугольники. В каждой вершине сходится по три ребра. У икосаэдра грани — правильные треугольники, но в отличие от тетраэдра и октаэдра в каждой вершине сходится по пять ребер.

Рис. 115

Задача (81).

Найдите двугранные углы правильного тетраэдра.

Решение.

Пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр, точка E — середина ребра AB (рис. 116). Соединим точку E с вершинами C и D тетраэдра. CE и DE — медианы граней, а следовательно, и высоты. Поэтому угол φ — линейный угол двугранного угла при ребре AB. Угол φ находится по теореме косинусов для треугольника CDE. В нем $CD = a$, $EC = ED = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Имеем:

$$EC^2 + ED^2 - 2EC \cdot ED\cos\varphi = CD^2,$$

$$\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{2}a^2\cos\varphi = a^2, \quad \cos\varphi = \frac{1}{3}, \ \varphi = 70°32'.$$

Очевидно, двугранные углы при остальных ребрах тетраэдра такие же по величине.

Теорема (Эйлера).

5.7

Для любого выпуклого многогранника с числом вершин В, числом граней Г и числом ребер Р выполняется следующее равенство: В + Г − Р = 2.

Эта теорема названа по имени швейцарского математика Леонарда Эйлера, почти вся научная деятельность которого была связана с Петербург-ской академией. Он доказал эту теорему и опубликовал в 1752 г., хотя ее утверждение было известно ранее Р. Декарту. Убедимся на примере правильных многогранников в справедливости теоремы.

Для тетраэдра В = 4, Г = 4, Р = 6. Имеем: 4 + 4 − 6 = 2.

Для куба В = 8, Г = 6, Р = 12. Имеем: 8 + 6 − 12 = 2.

Для октаэдра В = 6, Г = 8, Р = 12. Имеем: 6 + 8 − 12 = 2.

Для додекаэдра В = 20, Г = 12, Р = 30. Имеем: 20 + 12 − 30 = 2.

Для икосаэдра В = 12, Г = 20, Р = 30. Имеем: 12 + 20 − 30 = 2.

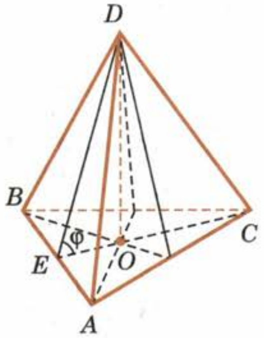


Рис. 116

Контрольные вопросы

1. Что такое двугранный угол (грань угла, ребро угла)?
2. Что такое линейный угол двугранного угла?
3. Почему мера двугранного угла не зависит от выбора линейного угла?
4. Объясните, что такое трехгранный угол (грани и ребра трехгранного угла).
5. Объясните, что такое плоские и двугранные углы трехгранного угла.
6. Что такое многогранник?
7. Какой многогранник называется выпуклым?
8. Что такое грань выпуклого многогранника, ребро, вершина, развертка?
9. Что такое призма (основания призмы, боковые грани, ребра)?
10. Докажите, что у призмы основания лежат в параллельных плоскостях и равны, боковые ребра параллельны и равны, боковые грани — параллелограммы.
11. Что такое высота призмы?
12. Что такое диагональ призмы?

13. Что представляет собой сечение призмы плоскостью, параллельной боковым ребрам, в частности диагональное сечение?
14. Как строится сечение призмы плоскостью, проходящей через данную прямую в плоскости основания призмы и данную точку на одной из боковых граней?
15. Какая призма называется прямой (наклонной)?
16. Какая призма называется правильной?
17. Что такое боковая (полная) поверхность призмы?
18. Докажите, что боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.
19. Что такое параллелепипед?
20. Докажите, что у параллелепипеда противолежащие грани параллельны и равны.
21. Докажите, что диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.
22. Докажите, что точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.
23. Какой параллелепипед называется прямоугольным? Что такое линейные размеры прямоугольного параллелепипеда?
24. Что такое куб?
25. Докажите, что в прямоугольном параллелепипеде квадрат диагонали равен сумме квадратов трех его измерений.
26. Сколько плоскостей симметрии у прямоугольного параллелепипеда?
27. Что такое пирамида (основание пирамиды, боковые грани, ребра, высота)?
28. Что представляют собой сечения пирамиды плоскостями, проходящими через ее вершину?
29. Что такое диагональное сечение пирамиды?
30. Как построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через данную прямую в плоскости основания пирамиды и заданную точку на одной из боковых граней?
31. Докажите, что плоскость, пересекающая пирамиду и параллельная ее основанию, отсекает подобную пирамиду.
32. Объясните, что такое усеченная пирамида.
33. Какая пирамида называется правильной? Что такое ось правильной пирамиды?
34. Что такое апофема правильной пирамиды?
35. Докажите, что боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему.
36. Какой многогранник называется правильным?
37. Перечислите типы правильных многогранников и опишите их.
38. Сформулируйте теорему Эйлера для выпуклых многогранников.

Задачи

Пункт 39

1. Из точек A и B, лежащих в гранях двугранного угла, опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 на ребро угла. Найдите: 1) отрезок AB, если $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $A_1B_1 = c$ и двугранный угол равен α; 2) двугранный угол α, если $AA_1 = 3$, $BB_1 = 4$, $A_1B_1 = 6$, $AB = 7$.

Пункт 40

2. У трехгранного угла (abc) двугранный угол при ребре c прямой, двугранный угол при ребре b равен φ, а плоский угол (bc) равен $\gamma\left(\varphi, \gamma < \frac{\pi}{2}\right)$. Найдите другие плоские углы: $\alpha = \angle(ab)$, $\beta = \angle(ac)$.
3. У трехгранного угла один плоский угол равен γ, а прилежащие к нему двугранные углы равны $\varphi\,(\varphi < 90°)$. Найдите два других плоских угла α и угол β, который образует плоскость угла γ с противолежащим ребром.
4. У трехгранного угла два плоских угла острые и равны α, а третий угол равен γ. Найдите двугранные углы φ, противолежащие плоским углам α, и угол β между плоскостью γ и противолежащим ребром.

Пункт 42

5. Докажите, что сечение призмы, параллельное основаниям, равно основаниям.
6. Сколько диагоналей имеет n-угольная призма?

Пункт 43

7. Постройте сечение четырехугольной призмы плоскостью, проходящей через сторону основания и одну из вершин другого основания.
8. Постройте сечение четырехугольной призмы плоскостью, проходящей через три точки на боковых ребрах призмы.

Пункт 44

9. У призмы одно боковое ребро перпендикулярно плоскости основания. Докажите, что остальные боковые ребра тоже перпендикулярны плоскости основания.
10. В прямой треугольной призме стороны основания равны 10 см, 17 см и 21 см, а высота призмы 18 см. Найдите площадь сечения, проведенного через боковое ребро и меньшую высоту основания.
11. Боковое ребро наклонной призмы равно 15 см и наклонено к плоскости основания под углом 30°. Найдите высоту призмы.

12. В наклонной треугольной призме расстояния между боковыми ребрами равны 37 см, 13 см и 40 см. Найдите расстояние между большей боковой гранью и противолежащим боковым ребром.

13. Основанием призмы является правильный шестиугольник со стороной a, боковые грани — квадраты. Найдите диагонали призмы и площади ее диагональных сечений.

14. В правильной шестиугольной призме, у которой боковые грани — квадраты, проведите плоскость через сторону нижнего основания и противолежащую ей сторону верхнего основания. Сторона основания равна a. Найдите площадь построенного сечения (рис. 117).

15. Через сторону нижнего основания правильной треугольной призмы проведена плоскость, пересекающая боковые грани по отрезкам, угол между которыми α. Найдите угол наклона этой плоскости к основанию призмы (рис. 118).

16. В правильной четырехугольной призме через середины двух смежных сторон основания проведена плоскость, пересекающая три боковых ребра и наклоненная к плоскости основания под углом α. Сторона основания равна a. Найдите площадь полученного сечения.

17. В правильной четырехугольной призме площадь основания 144 см^2, а высота 14 см. Найдите диагональ призмы.

18. В правильной четырехугольной призме площадь боковой грани равна Q. Найдите площадь диагонального сечения.

19. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 15, высота равна 20. Найдите кратчайшее расстояние от стороны основания до не пересекающей ее диагонали призмы (рис. 119).

20. В прямой треугольной призме все ребра равны. Боковая поверхность равна 12 м^2. Найдите высоту.

21. Боковая поверхность правильной четырехугольной призмы 32 м^2, а полная поверхность 40 м^2. Найдите высоту.

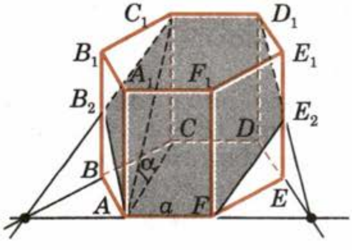


Рис. 117

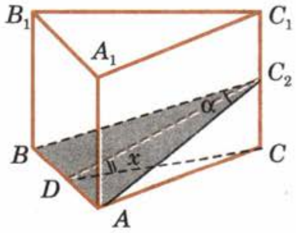


Рис. 118

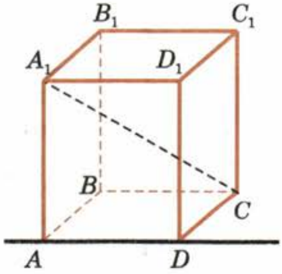


Рис. 119

22. В наклонной призме проведено сечение, перпендикулярное боковым ребрам и пересекающее все боковые ребра. Найдите боковую поверхность призмы, если периметр сечения равен p, а боковые ребра равны l.

23. Расстояния между параллельными прямыми, содержащими боковые ребра наклонной треугольной призмы, равны 2 см, 3 см и 4 см, а боковые ребра 5 см. Найдите боковую поверхность призмы.

24. По стороне основания a и боковому ребру b найдите полную поверхность правильной призмы: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

25. Плоскость, проходящая через сторону основания правильной треугольной призмы и середину противолежащего ребра, образует с основанием угол 45°. Сторона основания l. Найдите боковую поверхность призмы.

Пункт 45

26. У параллелепипеда три грани имеют площади 1 м^2, 2 м^2 и 3 м^2. Чему равна полная поверхность параллелепипеда?

27. Известны углы, образуемые ребрами параллелепипеда, сходящимися в одной вершине. Как найти углы между ребрами, сходящимися в любой другой вершине?

28. Докажите, что отрезок, соединяющий центры оснований параллелепипеда, параллелен боковым ребрам.

29. В прямом параллелепипеде стороны оснований 6 м и 8 м образуют угол 30°, боковое ребро равно 5 м. Найдите полную поверхность этого параллелепипеда.

30. В прямом параллелепипеде стороны основания 3 см и 8 см, угол между ними 60°. Боковая поверхность равна 220 см^2. Найдите полную поверхность.

31. В прямом параллелепипеде стороны основания 3 см и 5 см, а одна из диагоналей основания 4 см. Найдите бóльшую диагональ параллелепипеда, зная, что меньшая диагональ образует с плоскостью основания угол 60°.

32. Найдите диагонали прямого параллелепипеда, у которого каждое ребро равно a, а угол основания равен 60°.

33. Боковое ребро прямого параллелепипеда 5 м, стороны основания 6 м и 8 м, а одна из диагоналей основания 12 м. Найдите диагонали параллелепипеда.

34. В прямом параллелепипеде боковое ребро 1 м, стороны основания 23 дм и 11 дм, а диагонали основания относятся как 2 : 3. Найдите площади диагональных сечений.

Пункт 46

35. Найдите диагонали прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям: 1) 1, 2, 2; 2) 2, 3, 6; 3) 6, 6, 7.

36. Ребро куба равно a. Найдите расстояние от вершины куба до его диагонали, соединяющей две другие вершины.

37. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания 7 дм и 24 дм, а высота параллелепипеда 8 дм. Найдите площадь диагонального сечения.

38. Найдите поверхность прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям: 10 см, 22 см, 16 см.

39. Найдите боковую поверхность прямоугольного параллелепипеда, если его высота h, площадь основания Q, а площадь диагонального сечения M.

40. Диагонали трех граней прямоугольного параллелепипеда, сходящиеся в одной вершине, равны a, b, c. Найдите линейные размеры параллелепипеда (рис. 120).

Пункт 47

41. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, у которого основание равно 12 см, а боковая сторона 10 см. Боковые грани образуют с основанием равные двугранные углы, содержащие по 45°. Найдите высоту пирамиды.

42. Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см. Каждое боковое ребро пирамиды равно 13 см. Вычислите высоту пирамиды.

43. Основанием пирамиды является правильный треугольник; одна из боковых граней перпендикулярна основанию, а две другие наклонены к нему под углом α. Как наклонены к плоскости основания боковые ребра?

44. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой a. Каждое боковое ребро образует с плоскостью основания угол β. Найдите высоту пирамиды.

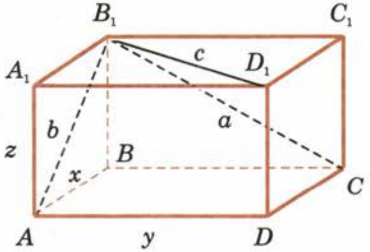


Рис. 120

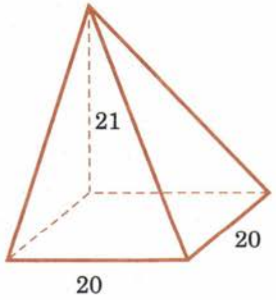


Рис. 121

45. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 60°. Найдите высоту пирамиды.

46. Основание пирамиды — параллелограмм, у которого стороны 3 см и 7 см, а одна из диагоналей 6 см; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей, она равна 4 см. Найдите боковое ребро пирамиды.

47. Основание пирамиды — ромб с диагоналями 6 м и 8 м; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба и равна 1 м. Найдите боковую поверхность пирамиды.

48. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник со сторонами 40 см, 25 см и 25 см. Ее высота проходит через вершину угла, противолежащего стороне 40 см, и равна 8 см. Найдите боковую поверхность пирамиды.

49. Основание пирамиды — квадрат, ее высота проходит через одну из вершин основания. Найдите боковую поверхность пирамиды, если сторона основания равна 20 дм, а высота 21 дм (рис. 121).

Пункт 48

50. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и две данные точки на ее основании.

51. Постройте сечение треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания пирамиды и данную точку на противолежащем ребре.

52. Постройте сечение четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания и точку на одном из боковых ребер.

Пункт 49

53. У четырехугольной усеченной пирамиды стороны одного основания равны 6 см, 7 см, 8 см, 9 см, а меньшая сторона другого основания равна 5 см. Найдите остальные стороны этого основания.

54. Боковое ребро пирамиды разделено на четыре равные части и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию пирамиды. Площадь основания равна 400 см^2. Найдите площади сечений.

55. Высота пирамиды равна 16 м. Площадь основания равна 512 м^2. На каком расстоянии от основания находится сечение, параллельное ему, если площадь сечения 50 м^2?

Пункт 50

56. В правильной треугольной пирамиде с высотой h через сторону основания a проведена плоскость, пересекающая противолежащее боковое ребро под прямым углом. Найдите площадь сечения.

57. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 7 см, а сторона основания 8 см. Найдите боковое ребро.

58. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α. Найдите двугранный угол x при основании пирамиды.

59. По данной стороне основания a и боковому ребру b найдите высоту правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

60. По данной стороне основания a и высоте b найдите апофему правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

61. По стороне основания a и высоте h найдите полную поверхность правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

62. Найдите полную поверхность правильной шестиугольной пирамиды, если ее боковое ребро a, а радиус окружности, вписанной в основание, r.

63. В правильной четырехугольной пирамиде площадь боковой поверхности равна 14,76 м^2, а площадь полной поверхности 18 м^2. Найдите сторону основания и высоту пирамиды.

64. По стороне основания a найдите боковую поверхность правильной четырехугольной пирамиды, у которой диагональное сечение равновелико основанию.

65. Найдите боковую поверхность пирамиды, если площадь основания Q, а двугранные углы при основании φ.

66. Найдите двугранные углы при основании правильной пирамиды, у которой площадь основания равна Q, а боковая поверхность S.

67. Найдите сторону основания и апофему правильной треугольной пирамиды, если ее боковое ребро равно 10 см, а площадь боковой поверхности равна 144 см^2.

68. В правильной четырехугольной пирамиде найдите сторону основания, если боковое ребро равно 5 см, а полная поверхность 16 см^2.

69. Докажите, что боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему.

70. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 7 см. Стороны оснований равны 10 см и 2 см. Найдите боковое ребро пирамиды.

71. Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды 4 дм и 1 дм. Боковое ребро 2 дм. Найдите высоту пирамиды.

72. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде высота равна 2 см, а стороны оснований 3 см и 5 см. Найдите диагональ этой пирамиды.

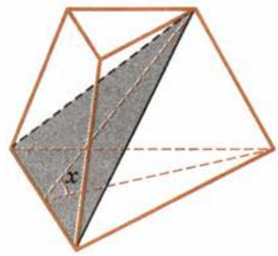


Рис. 122

73. Стороны оснований усеченной правильной треугольной пирамиды 2 см и 6 см. Боковая грань образует с бóльшим основанием угол 60°. Найдите высоту.

74. В правильной усеченной треугольной пирамиде сторона большего основания a, сторона меньшего — b. Боковое ребро образует с основанием угол 45°. Найдите площадь сечения, проходящего через боковое ребро и ось пирамиды[1].

75. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 4 см. Стороны оснований равны 2 см и 8 см. Найдите площади диагональных сечений.

76. В правильной треугольной усеченной пирамиде сторона нижнего основания 8 м, верхнего — 5 м, а высота 3 м. Проведите сечение через сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания. Найдите площадь сечения и двугранный угол между сечением и нижним основанием (рис. 122).

77. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований 8 м и 2 м. Высота равна 4 м. Найдите полную поверхность.

78. Найдите полную поверхность правильной усеченной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной, если высота h, а стороны оснований a и b.

Пункт 51

79. Докажите, что центры граней куба являются вершинами октаэдра, а центры граней октаэдра являются вершинами куба.

80. Докажите, что концы двух непараллельных диагоналей противолежащих граней куба являются вершинами тетраэдра.

---

[1] Ось правильной усеченной пирамиды совпадает с осью соответствующей полной пирамиды.

81. Найдите двугранные углы правильного тетраэдра.
82. Найдите двугранные углы октаэдра.
83. Какие плоскости симметрии имеет правильный тетраэдр?
84. Сколько плоскостей симметрии у правильного октаэдра, додекаэдра и икосаэдра?
85. Убедитесь в справедливости теоремы Эйлера для n-угольной призмы (пирамиды, усеченной пирамиды).

§ 6 Тела вращения

52. Цилиндр

Цилиндром (точнее, круговым цилиндром) называется тело, которое состоит из двух кругов, не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов (рис. 123). Круги называются **основаниями цилиндра**, а отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей этих кругов, — **образующими цилиндра**.

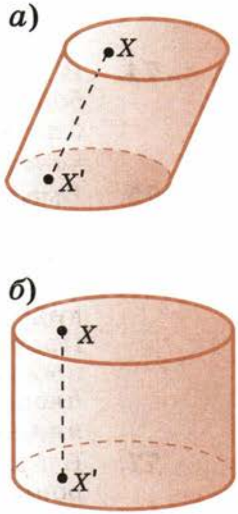


Рис. 123

Так как параллельный перенос есть движение, то

основания цилиндра равны.

Так как при параллельном переносе плоскость переходит в параллельную плоскость (или в себя), то

у цилиндра основания лежат в параллельных плоскостях.

Так как при параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние, то

у цилиндра образующие параллельны и равны.

Поверхность цилиндра состоит из оснований и боковой поверхности. Боковая поверхность составлена из образующих.

Цилиндр называется **прямым**, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований.

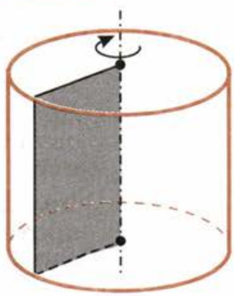


Рис. 124

В дальнейшем мы будем рассматривать только прямой цилиндр, называя его для краткости просто цилиндром. Прямой цилиндр наглядно можно представить себе как тело, которое описывает прямоугольник при вращении его около стороны как оси (рис. 124).

Радиусом цилиндра называется радиус его основания. **Высотой цилиндра** называется расстояние между плоскостями его оснований.

Осью цилиндра называется прямая, проходящая через центры оснований. Она параллельна образующим.

Если образующие боковой поверхности цилиндра неограниченно продолжить в обе стороны, то получится **полный цилиндр** или **цилиндрическая** поверхность, которая состоит из всех прямых (образующих), параллельных данной прямой s, которые пересекают данную окружность (рис. 125). Если окружность заменить какой-то другой линией, то получится цилиндрическая поверхность общего вида, которую мы не будем рассматривать.

Рис. 125

53. Сечения цилиндра плоскостями

Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси, представляет собой прямоугольник (рис. 126, *а*). Две его стороны — образующие цилиндра, а две другие — параллельные хорды оснований. В частности, прямоугольником является **осевое сечение**. Это — сечение цилиндра плоскостью, проходящей через его ось (рис. 126, *б*).

Задача (2).

Осевое сечение цилиндра — квадрат, площадь которого Q. Найдите площадь основания цилиндра.

Решение.

Сторона квадрата равна $\sqrt{Q}$. Она равна диаметру основания. Поэтому площадь основания равна

$$\pi\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\right)^2 = \frac{\pi Q}{4}.$$

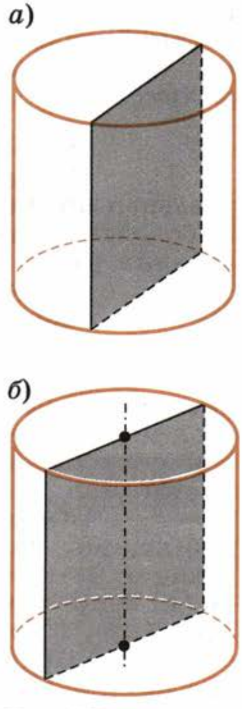


Рис. 126

Теорема

6.1

Плоскость, параллельная плоскости основания цилиндра, пересекает его боковую поверхность по окружности, равной окружности основания.

Доказательство.

Пусть β — плоскость, параллельная плоскости основания цилиндра (рис. 127). Параллельный перенос в направлении оси цилиндра, совмещающий плоскость β с плоскостью основания цилиндра, совмещает сечение боковой поверхности плоскостью β с окружностью основания. Теорема доказана.

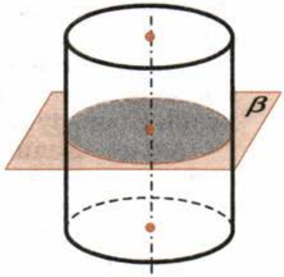


Рис. 127

54. Вписанная и описанная призмы

Призмой, вписанной в цилиндр, называется такая призма, у которой плоскостями оснований являются плоскости оснований цилиндра, а боковыми ребрами — образующие цилиндра (рис. 128).

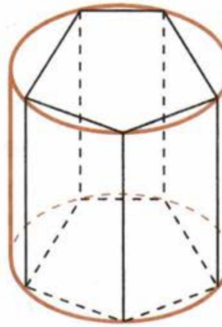


Рис. 128

Задача (7).

В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма. Найдите угол между диагональю ее боковой грани и осью цилиндра, если радиус основания равен высоте цилиндра.

Решение.

Боковые грани призмы — квадраты, так как сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна радиусу (рис. 129). Ребра призмы параллельны оси цилиндра, поэтому угол между диагональю грани и осью цилиндра равен углу между диагональю и боковым ребром. А этот угол равен 45°, так как грани — квадраты.

Касательной плоскостью к цилиндру называется плоскость, проходящая через образующую цилиндра и перпендикулярная плоскости осевого сечения, содержащей эту образующую (рис. 130).

Призмой, описанной около цилиндра, называется призма, у которой плоскостями оснований являются плоскости оснований цилиндра, а боковые грани касаются цилиндра (рис. 131).

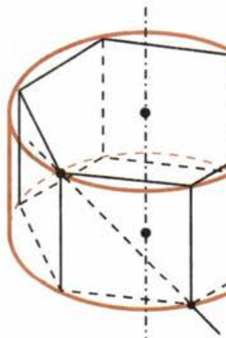


Рис. 129

Рис. 130

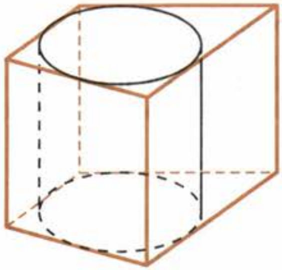


Рис. 131

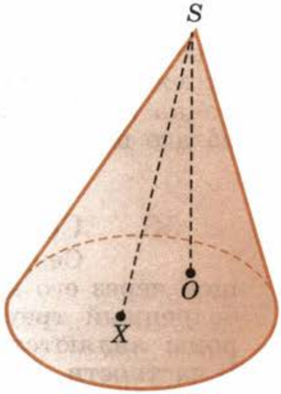


Рис. 132

55. Конус

Конусом (точнее, круговым конусом) называется тело, которое состоит из круга — **основания конуса,** точки, не лежащей в плоскости этого круга, — **вершины конуса** и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания (рис. 132). Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются **образующими конуса**. Поверхность конуса состоит из основания и боковой поверхности.

Конус называется **прямым,** если прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания, перпендикулярна плоскости основания. В дальнейшем мы будем рассматривать только прямой конус, называя его для краткости просто конусом. Наглядно прямой круговой конус можно представлять себе как тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника вокруг его катета как оси (рис. 133).

Рис. 133

Высотой конуса называется перпендикуляр, опущенный из его вершины на плоскость основания. У прямого конуса основание высоты совпадает с центром основания. **Осью прямого кругового конуса** называется прямая, содержащая его высоту.

Если образующие боковой поверхности конуса неограниченно продолжить в обе стороны, то получится **коническая** поверхность, которая состоит из всех прямых (образующих), проходящих через данную точку S, которые пересекают данную окружность (рис. 134). При этом окружность можно заменить любой другой линией. Тогда получится коническая поверхность общего вида.

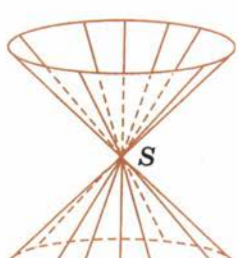


Рис. 134

Но мы будем рассматривать только коническую поверхность, направляющей для которой является окружность, и будем называть ее **полным конусом.** Точка S — вершина полного конуса — делит его на две полы.

56. Сечения конуса плоскостями

Сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину, представляет собой равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны являются образующими конуса (рис. 134). В частности, равнобедренным треугольником является осевое сечение конуса. Это — сечение, которое проходит через ось конуса (рис. 135).

Теорема

6.2

Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность — по окружности с центром на оси конуса.

Доказательство.

Пусть β — плоскость, параллельная плоскости основания конуса и пересекающая конус (рис. 136). Преобразование гомотетии относительно вершины конуса, совмещающее плоскость β с плоскостью основания, совмещает сечение конуса

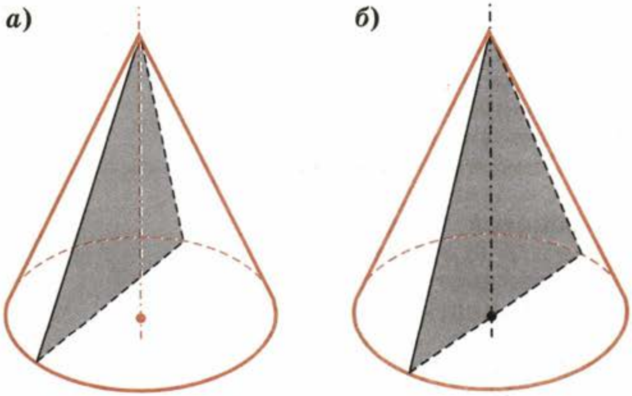


Рис. 135

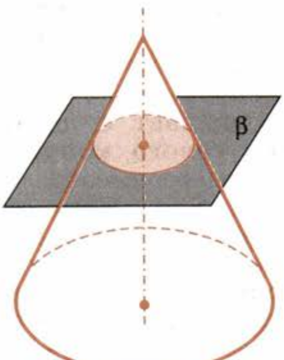


Рис. 136

плоскостью β с основанием конуса. Следовательно, сечение конуса плоскостью есть круг, а сечение боковой поверхности — окружность с центром на оси конуса. Теорема доказана.

Задача (15).

Конус пересечен плоскостью, параллельной основанию, на расстоянии d от вершины. Найдите площадь сечения, если радиус основания конуса R, а высота H.

Решение.

Сечение конуса получается из основания конуса преобразованием гомотетии относительно вершины конуса с коэффициентом гомотетии $k = \frac{d}{H}$. Поэтому радиус круга в сечении $r = R\frac{d}{H}$.

Следовательно, площадь сечения $S = \pi R^2 \frac{d^2}{H^2}$.

Плоскость, параллельная основанию конуса и пересекающая конус, отсекает от него меньший конус. Оставшаяся часть называется **усеченным конусом** (рис. 137).

Рис. 137

57. Вписанная и описанная пирамиды

Пирамидой, вписанной в конус, называется такая пирамида, основание которой есть многоугольник, вписанный в окружность основания конуса, а вершиной является вершина конуса (рис. 138). Боковые ребра пирамиды, вписанной в конус, являются образующими конуса.

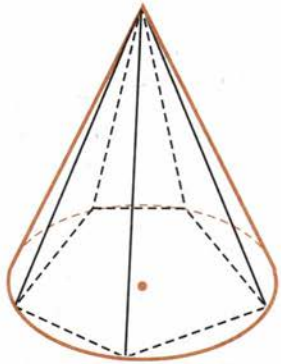


Рис. 138

Задача (25).

У пирамиды все боковые ребра равны. Докажите, что она вписана в некоторый конус.

Решение.

Опустим перпендикуляр SO из вершины пирамиды на плоскость основания (рис. 139) и обозначим длину боковых ребер пирамиды через l. Вершины основания удалены от точки O на одно и то же расстояние $R = \sqrt{l^2 - OS^2}$. Отсюда следует, что наша пирамида вписана в конус, у которого вершиной является вершина пирамиды, а основанием — круг с центром O и радиусом R.

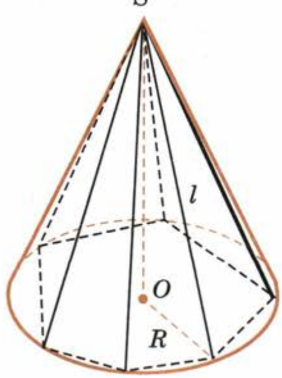


Рис. 139

Касательной плоскостью к конусу называется плоскость, проходящая через образующую конуса и перпендикулярная плоскости осевого сечения, содержащей эту образующую (рис. 140).

Пирамидой, описанной около конуса, называется пирамида, у которой основанием служит многоугольник, описанный около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса (рис. 141). Плоскости боковых граней описанной пирамиды являются касательными плоскостями конуса.

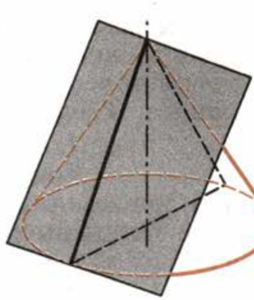


Рис. 140

58. Шар

Шаром называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного, от данной точки. Эта точка называется **центром шара**, а данное расстояние — **радиусом шара**.

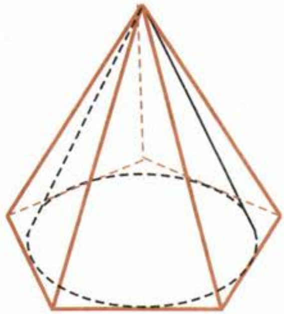


Рис. 141

Граница шара называется **шаровой поверхностью** или **сферой**. Таким образом, точками сферы являются все точки шара, которые удалены от центра на расстояние, равное радиусу. Любой отрезок, соединяющий центр шара с точкой шаровой поверхности, также называется радиусом.

Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящий через центр шара, называется **диаметром**. Концы любого диаметра называются **диаметрально противоположными точками шара**.

Шар, так же как цилиндр и конус, является телом вращения. Он получается при вращении полукруга вокруг его диаметра как оси (рис. 142).

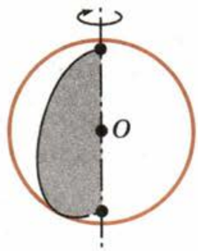


Рис. 142

59. Сечение шара плоскостью

Теорема

6.3

Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

Доказательство.

Пусть α — секущая плоскость и O — центр шара (рис. 143). Опустим перпендикуляр из центра шара на плоскость α и обозначим через O' основание этого перпендикуляра.

Пусть X — произвольная точка шара, принадлежащая плоскости α. По теореме Пифагора $OX^2 = OO'^2 + O'X^2$. Так как OX не больше радиуса R шара, то $O'X \leqslant \sqrt{R^2 - OO'^2}$, т. е. любая точка сечения шара плоскостью α находится от точки O' на расстоянии, не большем $\sqrt{R^2 - OO'^2}$, следовательно, она принадлежит кругу с центром O' и радиусом $\sqrt{R^2 - OO'^2}$.

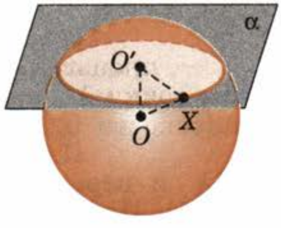


Рис. 143

Обратно: любая точка X этого круга принадлежит шару. А это значит, что сечение шара плоскостью α есть круг с центром в точке O'. Теорема доказана.

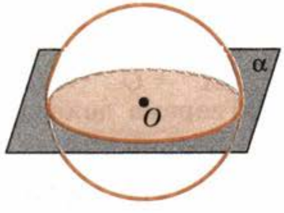


Рис. 144

Плоскость, проходящая через центр шара, называется **диаметральной плоскостью.** Сечение шара диаметральной плоскостью называется **большим кругом** (рис. 144), а сечение сферы — **большой окружностью.**

Задача (30).

Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга?

Решение.

Если радиус шара R (рис. 145), то радиус круга в сечении будет $\sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = R\sqrt{\frac{3}{4}}$. Отношение площади этого круга к площади большого круга равно $\pi\left(R\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2 : \pi R^2 = \frac{3}{4}$.

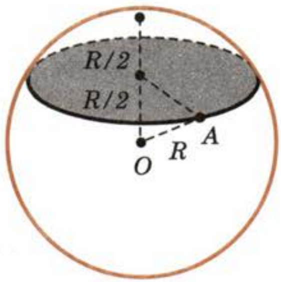


Рис. 145

60. Симметрия шара

Теорема

6.4

Любая диаметральная плоскость шара является его плоскостью симметрии. Центр шара является его центром симметрии.

Доказательство.

Пусть α — диаметральная плоскость и X — произвольная точка шара (рис. 146). Построим точку X', симметричную точке X относительно плоскости α.

Плоскость α перпендикулярна отрезку XX' и пересекается с ним в его середине (в точке A). Из равенства прямоугольных треугольников OAX и OAX' следует, что $OX' = OX$.

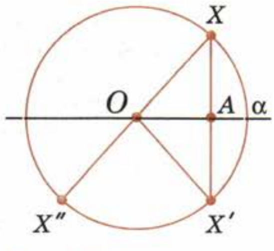


Рис. 146

Так как $OX \leqslant R$, то и $OX' \leqslant R$, т. е. точка, симметричная точке X, принадлежит шару. Первое утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь X'' — точка, симметричная точке X относительно центра шара. Тогда $OX'' = OX \leqslant R$, т. е. точка X'' принадлежит шару. Теорема доказана полностью.

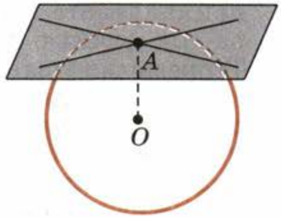


Рис. 147

61. Касательная плоскость к шару

Плоскость, проходящая через точку A шаровой поверхности и перпендикулярная радиусу, проведенному в точку A, называется **касательной плоскостью**. Точка A называется **точкой касания** (рис. 147).

Теорема

6.5

Касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку — точку касания.

Доказательство.

Пусть α — плоскость, касательная к шару, и A — точка касания (рис. 148). Возьмем произвольную точку X плоскости α, отличную от A. Так как OA — перпендикуляр, а OX — наклонная, то

$$OX > OA = R.$$

Следовательно, точка X не принадлежит шару. Теорема доказана.

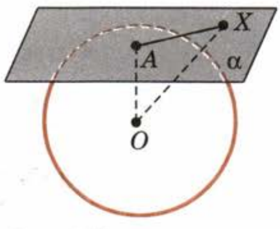


Рис. 148

Прямая в касательной плоскости шара, проходящая через точку касания, называется **касательной к шару** в этой точке. Так как касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку, то касательная прямая тоже имеет с шаром только одну общую точку — точку касания.

Задача (39).

Шар радиуса R касается сторон правильного треугольника со стороной a. Найдите расстояние от центра шара до плоскости треугольника.

Решение.

Пусть A, B, C — точки касания шара со сторонами треугольника (рис. 149). Опустим из центра O шара перпендикуляр OO_1 на плоскость треугольника. Отрезки OA, OB и OC перпендикулярны сторонам. По теореме о трех перпендикулярах отрезки O_1A, O_1B и O_1C тоже перпендикулярны соответствующим сторонам треугольника.

Из равенства прямоугольных треугольников OO_1A, OO_1B, OO_1C (у них катет общий, а гипотенузы равны радиусу) следует равенство сторон: $O_1A = O_1B = O_1C$. Следовательно, O_1 — центр окружности, вписанной в треугольник. Радиус этой окружности, как мы знаем, равен $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. По теореме Пифагора находим искомое расстояние. Оно равно $\sqrt{OA^2 - O_1A^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{12}}$.

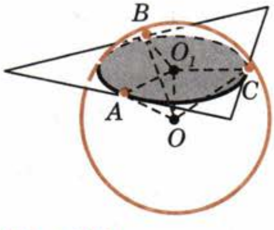


Рис. 149

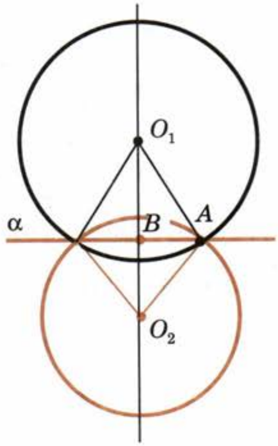


Рис. 150

62. Пересечение двух сфер

Теорема

6.6

Линия пересечения двух сфер есть окружность.

Доказательство.

Пусть O_1 и O_2 — центры сфер и A — точка их пересечения (рис. 150). Проведем через точку A плоскость α, перпендикулярную прямой O_1O_2.

Обозначим через B точку пересечения плоскости α с прямой O_1O_2. По теореме 6.3 плоскость α пересекает обе сферы по окружности K с центром B, проходящей через точку A. Таким образом, окружность K принадлежит пересечению сфер.

Покажем теперь, что сферы не имеют других точек пересечения, кроме точек окружности K. Допустим, точка X пересечения сфер не лежит на окружности K. Проведем плоскость через точку X и прямую O_1O_2. Она пересечет сферы по окружностям с центрами O_1 и O_2. Эти окружности пересекаются в двух точках, принадлежащих окружности K, да еще в точке X. Но две окружности не могут иметь больше двух точек пересечения. Мы пришли к противоречию. Итак, пересечение наших сфер есть окружность (K). Теорема доказана.

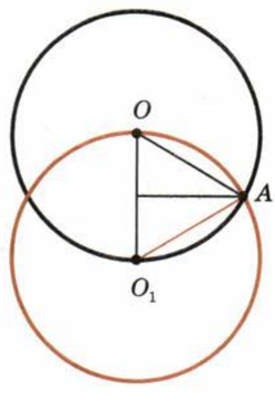


Рис. 151

Задача (44).

Два равных шара радиуса R расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Найдите длину линии, по которой пересекаются их поверхности.

Решение.

Проведем сечение через центры шаров (рис. 151). Линия, о которой идет речь в задаче, есть окружность (теорема 6.6). Ее радиус равен высоте равностороннего треугольника OAO_1 со сторонами, равными R. Высота равна $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, длина линии равна $\pi R\sqrt{3}$.

63. Вписанные и описанные многогранники

Многогранник называется **вписанным в шар**, если все его вершины лежат на поверхности шара. Многогранник называется **описанным около шара**, если все его грани касаются поверхности шара.

Задача (47).

Докажите, что центр шара, описанного около правильной пирамиды, лежит на ее оси.

Решение.

Опустим перпендикуляр OA из центра шара O на плоскость основания пирамиды (рис. 152). Пусть X — произвольная вершина основания пирамиды. По теореме Пифагора

$$AX^2 = OX^2 - OA^2 = R^2 - OA^2.$$

Таким образом, AX одно и то же для любой вершины основания пирамиды. А это значит, что точка A является центром окружности, описанной около основания пирамиды. Следовательно, центр шара O лежит на оси пирамиды.

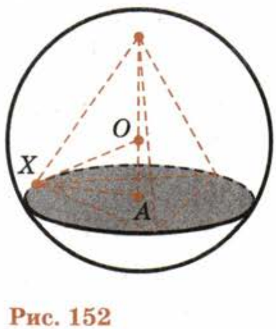


Рис. 152

64. О понятии тела и его поверхности в геометрии

В предыдущем изложении мы неоднократно употребляли слова *тело* и *поверхность тела*, вкладывая в их содержание известные вам наглядные представления. Теперь мы дадим определение геометрического тела и его поверхности.

Точка фигуры называется **внутренней**, если существует шар с центром в этой точке, целиком принадлежащий фигуре. Фигура называется **областью**, если все ее точки внутренние и если любые две ее точки можно соединить ломаной, целиком принадлежащей фигуре. Поясним данное определение на примере шара (рис. 153).

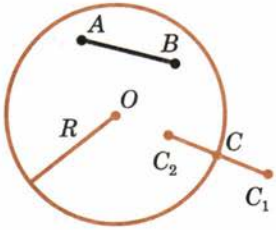


Рис. 153

Каждая точка шара, которая удалена от его центра на расстояние r, меньшее R, является внутренней точкой шара, так как шар с центром в этой точке и радиусом $R - r$ содержится в исходном шаре радиуса R. Все точки шара, которые удалены от центра на расстояние, меньшее R, образуют область. В самом деле, любые две такие точки A и B соединяются отрезком AB, все точки которого удалены от центра на расстояние, меньшее R.

Точка пространства называется **граничной точкой** данной фигуры, если любой шар с центром в этой точке содержит как точки, принадлежащие фигуре, так и точки, не принадлежащие ей. Для шара граничными точками являются точки, которые удалены от точки O на расстояние, равное R, т. е. граница шара есть сфера. Для каждой такой точки C можно указать в каждом шаре с центром C и радиусом $r > 0$ точки C_1 и C_2, отстоящие от точки O на расстояние, большее R, и на расстояние, меньшее R. Область вместе с ее границей называется **замкнутой областью**.

Телом называется конечная замкнутая область. Граница тела называется **поверхностью тела**. Шар является примером тела. Другими знакомыми нам примерами тел являются многогранник, цилиндр и конус.

Подобно тому как в пространстве, на плоскости вводятся понятия внутренней точки фигуры, граничной точки и области. Граничные точки области образуют границу области. В круге радиуса R точки, которые находятся на расстоянии, меньшем R, от центра, внутренние, а точки, находящиеся на расстоянии R, граничные. Круг — замкнутая область. Плоский многоугольник — это ограниченная замкнутая область на плоскости, граница которой является многоугольником.

Контрольные вопросы

1. Объясните, что такое круговой цилиндр (образующая цилиндра, основания цилиндра, боковая поверхность цилиндра).
2. Какой цилиндр называется прямым?
3. Что такое радиус цилиндра, высота цилиндра, ось цилиндра, осевое сечение цилиндра?
4. Докажите, что плоскость, параллельная плоскости основания цилиндра, пересекает его боковую поверхность по окружности, равной окружности основания.
5. Что такое призма, вписанная в цилиндр (описанная около цилиндра)? Что такое касательная плоскость к цилиндру?
6. Что такое круговой конус, вершина конуса, образующая конуса, основание конуса, боковая поверхность конуса?
7. Какой конус называется прямым?
8. Что такое высота конуса, ось конуса, осевое сечение конуса?
9. Докажите, что плоскость, параллельная плоскости основания конуса, пересекает боковую поверхность по окружности с центром на оси конуса.
10. Что такое усеченный конус?
11. Какая пирамида называется вписанной в конус (описанной около конуса)? Что такое касательная плоскость к конусу?
12. Что такое шар (шаровая поверхность или сфера)?
13. Что такое радиус шара, диаметр шара? Какие точки шара называются диаметрально противоположными?
14. Докажите, что пересечение шара с плоскостью есть круг.
15. Какая плоскость называется диаметральной плоскостью шара? Что такое большой круг?
16. Докажите, что любая диаметральная плоскость шара является его плоскостью симметрии; центр шара является его центром симметрии.
17. Какая плоскость называется касательной к шару?
18. Докажите, что касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку — точку касания.
19. Какая прямая называется касательной к шару?
20. Линия пересечения двух сфер есть окружность. Докажите.
21. Какой многогранник называется вписанным в шар (описанным около шара)?

Задачи

Пункт 53

1. Радиус основания цилиндра 2 м, высота 3 м. Найдите диагональ осевого сечения.
2. Осевое сечение цилиндра — квадрат, площадь которого Q. Найдите площадь основания цилиндра.
3. Высота цилиндра 6 см, радиус основания 5 см. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 см от нее.
4. Высота цилиндра 8 дм, радиус основания 5 дм. Цилиндр пересечен плоскостью так, что в сечении получился квадрат. Найдите расстояние от этого сечения до оси (рис. 154).
5. Высота цилиндра 6 дм, радиус основания 5 дм. Концы отрезка AB, равного 10 дм, лежат на окружностях обоих оснований. Найдите кратчайшее расстояние от него до оси.
6. В равностороннем цилиндре (диаметр равен высоте цилиндра) точка окружности верхнего основания соединена с точкой окружности нижнего основания. Угол между радиусами, проведенными в эти точки, равен 60°. Найдите угол x между проведенной прямой и осью цилиндра (рис. 155).

Пункт 54

7. В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма. Найдите угол между диагональю ее боковой грани и осью цилиндра, если радиус основания равен высоте цилиндра.
8. Высота цилиндра 2 м. Радиус оснований 7 м. В этот цилиндр наклонно вписан квадрат так, что все вершины его лежат на окружностях оснований. Найдите сторону квадрата (рис. 156).

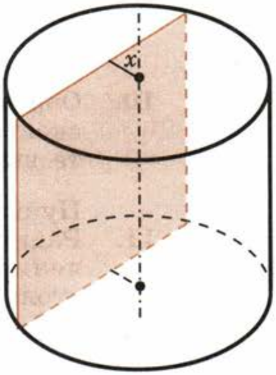


Рис. 154

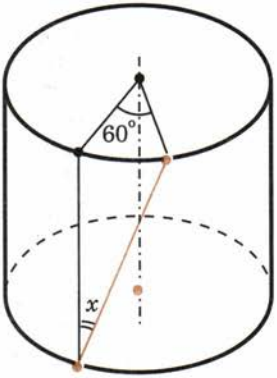


Рис. 155

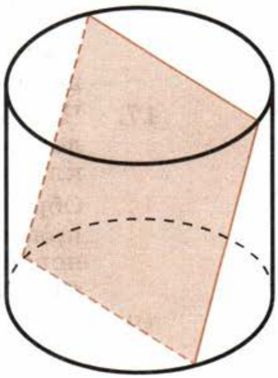


Рис. 156

Пункт 55

9. Радиус основания конуса 3 м, высота 4 м. Найдите образующую.

10. Образующая конуса l наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите высоту.

Пункт 56

11. Радиус основания конуса R. Осевым сечением является прямоугольный треугольник. Найдите его площадь.

12. В равностороннем конусе (в осевом сечении правильный треугольник) радиус основания R. Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен α (рис. 157).

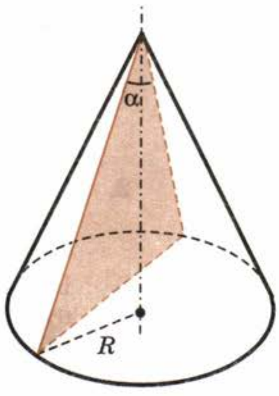


Рис. 157

13. Высота конуса 20, радиус его основания 25. Найдите площадь сечения, проведенного через вершину, если расстояние от него до центра основания конуса равно 12.

14. Радиус основания конуса R, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α. Через вершину конуса проведена плоскость под углом φ к его высоте. Найдите площадь полученного сечения.

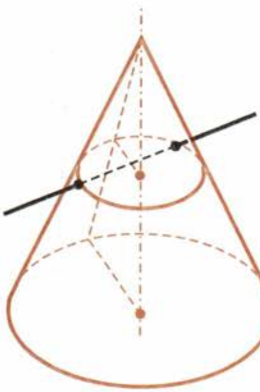


Рис. 158

15. Конус пересечен плоскостью, параллельной основанию, на расстоянии d от вершины. Найдите площадь сечения, если радиус основания конуса R, а высота H.

16. Высота конуса H. На каком расстоянии от вершины надо провести плоскость, параллельную основанию, чтобы площадь сечения была равна половине площади основания?

17. Через середину высоты конуса проведена прямая параллельно образующей l. Найдите длину отрезка прямой, заключенного внутри конуса.

18. Образующая конуса 13 см, высота 12 см. Конус пересечен прямой, параллельной основанию; расстояние от нее до основания равно 6 см, а до высоты — 2 см. Найдите отрезок прямой, заключенный внутри конуса (рис. 158).

19. Радиусы оснований усеченного конуса 3 м и 6 м, высота 4 м. Найдите образующую.

20. Радиусы оснований усеченного конуса R и r, образующая наклонена к основанию под углом 45°. Найдите высоту.

21. Образующая усеченного конуса равна $2a$ и наклонена к основанию под углом 60°. Радиус одного основания вдвое больше радиуса другого основания. Найдите радиусы.

22. Радиусы оснований усеченного конуса 3 дм и 7 дм, образующая 5 дм. Найдите площадь осевого сечения.

23. Площади оснований усеченного конуса 4 дм^2 и 16 дм^2. Через середину высоты проведена плоскость, параллельная основаниям. Найдите площадь сечения.

24. Площади оснований усеченного конуса M и m. Найдите площадь среднего сечения, параллельного основаниям.

Рис. 159

Пункт 57

25. У пирамиды все боковые ребра равны. Докажите, что она вписана в некоторый конус.

26. В конусе даны радиус основания R и высота H. Найдите ребро вписанного в него куба (рис. 159).

27. В конусе даны радиус основания R и высота H. В него вписана правильная треугольная призма, у которой боковые грани — квадраты. Найдите ребро призмы.

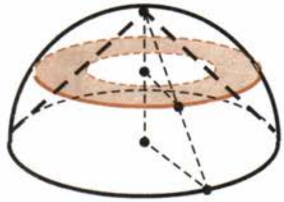


Рис. 160

Пункт 59

28. Полушар и вписанный в него конус имеют общее основание и общую высоту. Через середину высоты проведена плоскость, параллельная основанию. Докажите, что площадь сечения, заключенного между боковой поверхностью конуса и поверхностью полушара, равна половине площади основания (рис. 160).

29. Шар, радиус которого 41 дм, пересечен плоскостью на расстоянии 9 дм от центра. Найдите площадь сечения.

30. Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга?

31. Радиус шара R. Через конец радиуса проведена плоскость под углом 60° к нему. Найдите площадь сечения.

32. Радиус земного шара R. Чему равна длина параллели, если ее широта 60° (рис. 161)?

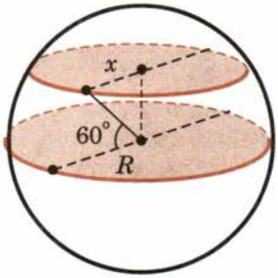


Рис. 161

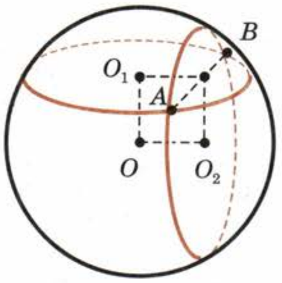


Рис. 162

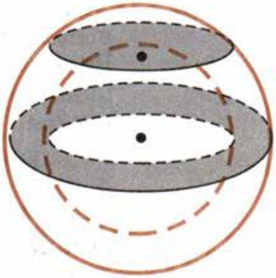


Рис. 163

33. Город N находится на 60° северной широты. Какой путь совершает этот пункт в течение 1 ч вследствие вращения Земли вокруг своей оси? Радиус Земли принять равным 6000 км.

34. На поверхности шара даны три точки. Прямолинейные расстояния между ними 6 см, 8 см, 10 см. Радиус шара 13 см. Найдите расстояние от центра до плоскости, проходящей через эти точки.

35. Диаметр шара 25 см. На его поверхности даны точка A и окружность, все точки которой удалены (по прямой) от A на 15 см. Найдите радиус этой окружности.

36. Радиус шара 7 см. На его поверхности даны две равные окружности, имеющие общую хорду длиной 2 см. Найдите радиусы окружностей, зная, что их плоскости перпендикулярны (рис. 162).

Пункт 61

37. Дан шар радиуса R. Через одну точку его поверхности проведены две плоскости: первая — касательная к шару, вторая — под углом 30° к первой. Найдите площадь сечения.

38. Тело ограничено двумя концентрическими шаровыми поверхностями (полый шар). Докажите, что его сечение плоскостью, проходящей через центр, равновелико сечению, касательному к внутренней шаровой поверхности (рис. 163).

39. Шар радиуса R касается всех сторон правильного треугольника со стороной a. Найдите расстояние от центра шара до плоскости треугольника.

40. Стороны треугольника 13 см, 14 см и 15 см. Найдите расстояние от плоскости треугольника до центра шара, касающегося всех сторон треугольника. Радиус шара 5 см.

41. Диагонали ромба 15 см и 20 см. Шаровая поверхность касается всех его сторон. Радиус шара 10 см. Найдите расстояние от центра шара до плоскости ромба.

42. Через касательную к поверхности шара проведены две взаимно перпендикулярные плоскости, пересекающие шар по кругам радиусов r_1 и r_2. Найдите радиус шара R.

43. Шар радиуса R вписан в усеченный конус. Угол наклона образующей к плоскости нижнего основания конуса равен α. Найдите радиусы оснований и образующую усеченного конуса.

Пункт 62

44. Два равных шара радиуса R расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Найдите длину линии, по которой пересекаются их поверхности.

45. Радиусы шаров равны 25 дм и 29 дм, а расстояние между их центрами 36 дм. Найдите длину линии, по которой пересекаются их поверхности.

46. Найдите радиус шара, описанного около куба с ребром a.

Пункт 63

47. Докажите, что центр шара, описанного около правильной пирамиды, лежит на ее оси.

48. Докажите, что центр шара, вписанного в правильную пирамиду, лежит на ее высоте.

49. Найдите радиус шара, описанного около правильного тетраэдра с ребром a.

50. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, а плоский угол при вершине равен α. Найдите радиусы вписанного и описанного шаров.

51. В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида с плоскими углами α при ее вершине. Найдите высоту пирамиды.

52. Правильная n-угольная призма вписана в шар радиуса R. Ребро основания призмы равно a. Найдите высоту призмы при: 1) $n = 3$; 2) $n = 4$; 3) $n = 6$.

53. Сторона основания правильной n-угольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен φ. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду.

54. Найдите радиус шара, описанного около правильной n-угольной пирамиды, если сторона основания равна a, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α.

§ 7 Объемы многогранников

65. Понятие объема

Подобно тому как для фигур на плоскости вводится понятие площади, для тел в пространстве вводится понятие объема. Сначала рассмотрим только простые тела. Тело называется **простым**, если его можно разбить на конечное число треугольных пирамид.

Для простых тел **объем** — это положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами:

1. Равные тела имеют равные объемы.
2. Если тело разбито на части, являющиеся простыми телами, то объем этого тела равен сумме объемов его частей.
3. Объем куба, ребро которого равно единице длины, равен единице.

Если куб, о котором идет речь в определении, имеет ребро 1 см, то объем будет в кубических сантиметрах; если ребро куба равно 1 м, то объем будет в кубических метрах; если ребро куба равно 1 км, то объем будет в кубических километрах и т. д.

Примером простого тела является любой выпуклый многогранник. Его можно разбить на конечное число треугольных пирамид следующим образом. Отметим какую-нибудь вершину S многогранника. Разобьем на треугольники все грани многогранника, не содержащие вершину S. Тогда треугольные пирамиды, для которых основаниями являются эти треугольники, а общей вершиной — точка S, дают разбиение многогранника на треугольные пирамиды. На рисунке 164 показано такое разбиение для произвольной пирамиды.

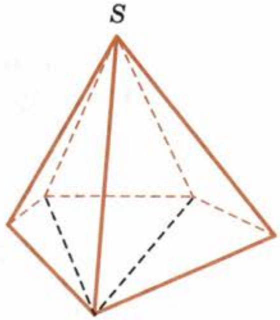


Рис. 164

66. Объем прямоугольного параллелепипеда

Найдем объем прямоугольного параллелепипеда с линейными размерами a, b, c. Для этого сначала докажем, что объемы двух прямоугольных параллелепипедов с равными основаниями относятся как их высоты.

Пусть P и P_1 — два прямоугольных параллелепипеда с общим основанием $ABCD$ и высотами AE и AE_1. Будем считать для определенности, что $AE_1 < AE$ (рис. 165). Пусть V и V_1 — объемы параллелепипедов. Разобьем ребро AE параллелепипеда P на большое число n равных частей. Каждая из них равна $\frac{AE}{n}$. Пусть m — число точек деления, которые лежат на ребре AE_1. Тогда

$$\left(\frac{AE}{n}\right)m \leqslant AE_1 \leqslant \left(\frac{AE}{n}\right)(m+1).$$

Отсюда

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{AE_1}{AE} \leqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \qquad (*)$$

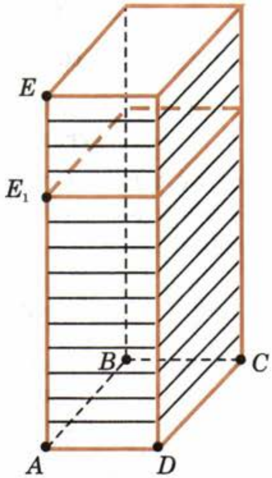


Рис. 165

Проведем через точки деления плоскости, параллельные основанию. Они разобьют параллелепипед P на n равных параллелепипедов. Каждый из них имеет объем $\frac{V}{n}$. Параллелепипед P_1 содержит первые m параллелепипедов, считая снизу, и содержится в $m + 1$ параллелепипедах. Поэтому

$$\left(\frac{V}{n}\right)m \leqslant V_1 \leqslant \left(\frac{V}{n}\right)(m+1).$$

Отсюда

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{V_1}{V} \leqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \qquad (**)$$

Из неравенств (*) и (**) мы видим, что оба числа $\frac{V_1}{V}$ и $\frac{AE_1}{AE}$ заключены между $\frac{m}{n}$ и $\frac{m}{n} + \frac{1}{n}$. Поэтому они отличаются не более чем на $\frac{1}{n}$. А так как n можно взять сколь угодно большим, то это может быть только при $\frac{V_1}{V} = \frac{AE_1}{AE}$, что и требовалось доказать.

Возьмем теперь куб, являющийся единицей измерения объема, и три прямоугольных параллелепипеда с измерениями: a, 1, 1; a, b, 1;

a, b, c. Обозначим их объемы V_1, V_2 и V соответственно. По доказанному $\frac{V_1}{1} = \frac{a}{1}$, $\frac{V_2}{V_1} = \frac{b}{1}$, $\frac{V}{V_2} = \frac{c}{1}$. Перемножая эти три равенства почленно, получим $V = abc$. Итак,

объем прямоугольного параллелепипеда с линейными размерами a, b, c вычисляется по формуле $V = abc$.

Задача (3).

Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^3. Чему равно ребро куба?

Решение.

Обозначим ребро куба через x, тогда $(x + 2)^3 - x^3 = 98$, т. е. $x^2 + 2x - 15 = 0$. Уравнение имеет два корня: $x = 3$, $x = -5$. Геометрический смысл имеет только положительный корень. Итак, ребро куба равно 3 см.

67. Объем наклонного параллелепипеда

Найдем объем наклонного параллелепипеда (рис. 166). Пусть P — наклонный параллелепипед с площадью основания S, высотой H и объемом V. Дополним параллелепипед P такими же n параллепипедами так, как показано на рисунке. Получим параллепипед P', который имеет площадь основания nS, объем nV и высоту H.

Рассечем параллелепипед P' на две части плоскостью α, пересекающей все его ребра, параллельные AA', под прямым углом. Это всегда возможно, если достаточно велико n. Сдвинем одну из этих частей так, чтобы совпали точки A и A'. При этом получим новый параллелепипед P'', у которого также площадь основания nS, объем nV, высота H, а его грани, по которым производился разрез плоскостью α, перпендикулярны основанию.

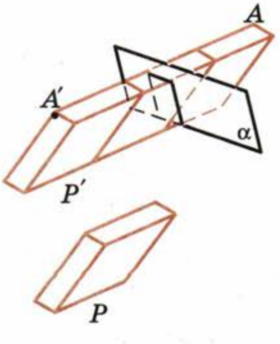


Рис. 166

Разрежем параллелепипед P'' на n равных частей плоскостями, параллельными плоскости α. Пусть P_1 — одна из этих частей, P_1 — это параллелепипед с той же площадью основания, объемом и высотой, как исходный параллелепипед P.

Проделаем с параллелепипедом P_1 такое же преобразование, каким из параллелепипеда P

получен параллелепипед P_1. При этом получится прямоугольный параллелепипед P_2 с тем же объемом, площадью основания и высотой, как у параллелепипеда P. А так как у прямоугольного параллелепипеда объем равен произведению площади основания на высоту, то и у параллелепипеда P объем равен произведению площади основания на высоту.

Итак,

объем любого параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

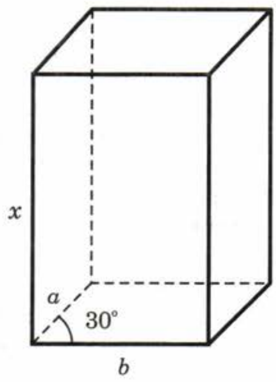


Рис. 167

Задача (11).

В прямом параллелепипеде стороны основания a и b образуют угол $30°$. Боковая поверхность равна S. Найдите его объем.

Решение.

Обозначим высоту через x (рис. 167). Тогда

$$(2a + 2b)\,x = S.$$

Отсюда $x = \frac{S}{2(a+b)}$.

Площадь основания параллелепипеда равна $ab \sin 30° = \frac{ab}{2}$. Объем равен $\frac{abS}{4(a+b)}$.

68. Объем призмы

Рассмотрим сначала треугольную призму (рис. 168). Дополним ее до параллелепипеда, как указано на рисунке. Точка O является центром симметрии параллелепипеда. Поэтому достроенная призма симметрична исходной относительно точки O, следовательно, имеет объем, равный объему исходной призмы. Таким образом, объем построенного параллелепипеда равен удвоенному объему данной призмы.

Объем параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту. Площадь его основания равна удвоенной площади треугольника ABC, а высота равна высоте исходной призмы. Отсюда заключаем, что объем исходной призмы равен произведению площади ее основания на высоту.

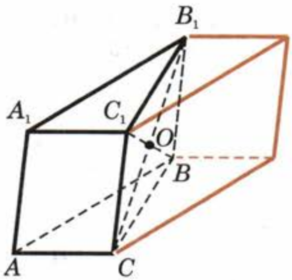


Рис. 168

Рассмотрим теперь произвольную призму (рис. 169). Разобьем ее основание на треугольники. Пусть $\triangle$ — один из этих треугольников. Проведем через произвольную точку X треугольника $\triangle$ прямую, параллельную боковым ребрам. Пусть a_x — отрезок этой прямой, принадлежащий призме. Когда точка X описывает треугольник $\triangle$, отрезки a_x заполняют треугольную призму. Построив такую призму для каждого треугольника $\triangle$, мы получим разбиение данной призмы на треугольные. Все эти призмы имеют одну и ту же высоту, равную высоте исходной призмы.

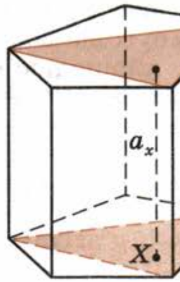


Рис. 169

Объем данной призмы равен сумме объемов треугольных призм, ее составляющих. По доказанному объем треугольной призмы равен произведению площади ее основания на высоту. Отсюда следует, что объем исходной призмы равен:

$$V = S_1H + S_2H + \ldots + S_nH =$$
$$= (S_1 + S_2 + \ldots + S_n)H,$$

где S_1, S_2, ..., S_n — площади треугольников, на которые разбито основание призмы, а H — высота призмы. Сумма площадей треугольников равна площади S основания данной призмы. Поэтому $V = SH$.

Итак,

объем любой призмы равен произведению площади ее основания на высоту.

Задача (24).

В наклонной призме проведено сечение, перпендикулярное боковым ребрам и пересекающее все боковые ребра. Найдите объем призмы, если площадь сечения Q, а боковые ребра равны l.

Решение.

Плоскость проведенного сечения разбивает призму на две части (рис. 170). Подвергнем одну из них параллельному переносу, совмещающему основания призмы. При этом получим прямую призму, у которой основанием служит сечение исходной призмы, а высота равна l. Эта призма имеет тот же объем. Таким образом, объем исходной призмы равен Ql.


Рис. 170

69. Равновеликие тела

Два тела называются **равновеликими**, если они имеют равные объемы.

Две треугольные пирамиды с равными площадями оснований и равными высотами равновелики.

Действительно, пусть треугольные пирамиды имеют равные площади оснований и равные высоты. Докажем, что они равновелики, т. е. имеют равные объемы.

Разделим высоту каждой пирамиды на n равных частей и проведем через точки деления плоскости, параллельные основаниям. Эти плоскости разбивают пирамиду на n слоев. Для каждого слоя первой пирамиды построим содержащуюся в нем призму, как показано на рисунке 171, *а*. Для каждого слоя второй пирамиды построим призму, содержащую слой (рис. 171, *б*). Призма в k-м (считая от вершины) слое первой пирамиды и призма, содержащая $(k-1)$-й слой второй пирамиды, имеют равные площади оснований, так как эти основания подобны основаниям пирамид и коэффициент подобия один и тот же $\left(\frac{k}{n}\right)$. Так как у этих призм и высоты одинаковы $\left(\frac{H}{n}\right)$, то они имеют равные объемы.

Пусть V_1 и V_2 — объемы пирамид, а V_1' и V_2' — суммы объемов построенных для них призм. Так как объем призмы в k-м слое первой пирамиды равен объему призмы $(k-1)$-го слоя второй пирамиды, то сумма объемов всех призм для первой пирамиды равна сумме объемов призм всех слоев второй пирамиды, кроме последнего. Объем призмы последнего слоя равен $S\frac{H}{n}$, где S — площадь основания пирамиды, а H — высота. Отсюда следует, что $V_1' = V_2' - S\frac{H}{n}$. Так как, кроме того, $V_1 > V_1'$, а $V_2 < V_2'$, то $V_1 > V_2 - S\frac{H}{n}$, или $V_2 - V_1 \leqslant S\frac{H}{n}$. Это неравенство выполняется при любом сколь угодно большом n. А это возможно толь-

а)

б)

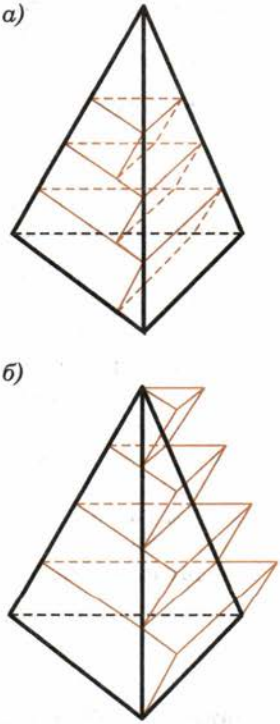


Рис. 171

ко при $V_2 - V_1 \leqslant 0$, т. е. при $V_2 \leqslant V_1$. Поменяв ролями пирамиды, получим противоположное неравенство $V_2 \geqslant V_1$. А отсюда следует, что $V_1 = V_2$. Утверждение доказано.

70. Объем пирамиды

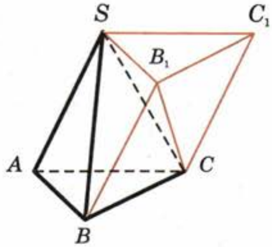


Рис. 172

Пусть $SABC$ — треугольная пирамида с вершиной S и основанием ABC. Дополним эту пирамиду до треугольной призмы с тем же основанием и высотой (рис. 172). Эта призма составлена из трех пирамид: данной пирамиды $SABC$ и еще двух треугольных пирамид SCC_1B_1 и $SCBB_1$.

У второй и третьей пирамид равные основания — $\triangle CC_1B_1$ и $\triangle B_1BC$ и общая высота, проведенная из вершины S. Поэтому у них равные объемы. У первой и третьей пирамид тоже равные основания — $\triangle SAB$ и $\triangle BB_1S$ и совпадающие высоты, проведенные из вершины C. Поэтому у них тоже равные объемы.

Значит, все три пирамиды имеют один и тот же объем. Так как сумма этих объемов равна объему призмы, то объемы пирамид равны $\frac{SH}{3}$.

Итак,

объем любой треугольной пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту:

$$V = \frac{1}{3}SH.$$

Пусть теперь имеем любую, не обязательно треугольную пирамиду. Разобьем ее основание на треугольники $\triangle_1, \triangle_2, \dots, \triangle_n$. Пирамиды, у которых основаниями являются эти треугольники, а вершинами — вершина данной пирамиды, составляют данную пирамиду. Объем данной пирамиды равен сумме объемов составляющих ее пирамид. Так как все они имеют ту же высоту H, что и данная пирамида, то объем ее равен:

$$V = \frac{1}{3}H\left(S_1 + S_2 + \dots + S_n\right) = \frac{1}{3}SH.$$

Итак,

объем любой пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту.

71. Объем усеченной пирамиды

Задача (44).

Найдите объем усеченной пирамиды с площадями оснований Q_1 и Q_2 ($Q_1 > Q_2$) и высотой h.

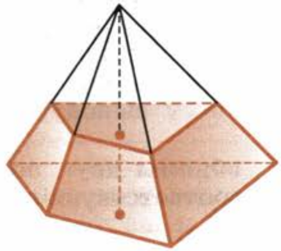


Рис. 173

Решение.

Дополним данную усеченную пирамиду до полной (рис. 173). Пусть x — ее высота. Объем усеченной пирамиды равен разности объемов двух полных пирамид: одной с площадью основания Q_1 и высотой x, другой с площадью основания Q_2 и высотой $x - h$.

Из подобия этих пирамид находим x:

$\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{x}{x-h}\right)^2$. Отсюда $x = \frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}}$.

Объем усеченной пирамиды равен:

$$V = \frac{1}{3}\left[Q_1\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}} - Q_2\left(\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}} - h\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}h\frac{Q_1\sqrt{Q_1} - Q_2\sqrt{Q_2}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}} = \frac{1}{3}h\left(Q_1 + \sqrt{Q_1Q_2} + Q_2\right).$$

72. Объемы подобных тел

Пусть T и T' — два простых подобных тела. Это значит, что существует преобразование подобия, при котором тело T переходит в тело T'. Обозначим через k коэффициент подобия.

Разобьем тело T на треугольные пирамиды P_1, P_2, ..., P_n. Преобразование подобия, которое переводит тело T в тело T', переводит пирамиды P_1, P_2, ..., P_n в пирамиды P'_1, P'_2, ..., P'_n. Эти пирамиды составляют тело T', и поэтому объем тела T' равен сумме объемов пирамид P'_1, P'_2, ..., P'_n.

Так как пирамиды P'_i и P_i подобны и коэффициент подобия равен k, то отношение их высот равно k, а отношение площадей их оснований равно k^2. Следовательно, отношение объемов пирамид равно k^3. Так как тело T составлено из пирамид P_i, а тело T' составлено из пирамид P'_i, то отношение объемов тел T' и T тоже равно k^3.

Число k — коэффициент подобия — равно отношению расстояний между любыми двумя соответствующими парами точек при преобразовании подобия. Следовательно, это число равно отношению любых двух соответствующих линейных размеров тел T' и T. Мы приходим к следующему выводу:

объемы двух подобных тел относятся как кубы их соответствующих линейных размеров.

Задача (48).

Через середину высоты пирамиды проведена плоскость, параллельная основанию. В каком отношении она делит объем пирамиды?

Решение.

Как мы знаем, проведенная плоскость отсекает подобную пирамиду (рис. 174). Коэффициент подобия равен отношению высот, т. е. $\frac{1}{2}$.

Поэтому объемы пирамид относятся как $\left(\frac{1}{2}\right)^3 : 1$. Следовательно, плоскость делит нашу пирамиду на части, объемы которых относятся как

$$\frac{1}{8} : \left(1 - \frac{1}{8}\right) = 1 : 7.$$

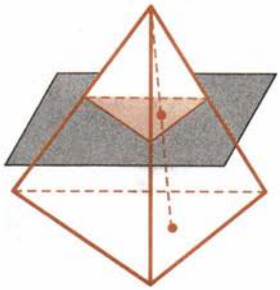


Рис. 174

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте основные свойства объема.
2. Докажите, что объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его линейных размеров.
3. Докажите, что объем любого параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.
4. Докажите, что объем треугольной призмы равен произведению площади ее основания на высоту.
5. Докажите, что объем любой призмы равен произведению площади ее основания на высоту.
6. Докажите, что треугольные пирамиды с равными площадями оснований и равными высотами равновелики.
7. Выведите формулу для объема треугольной пирамиды.
8. Докажите, что объем любой пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту.
9. Докажите, что объемы подобных тел относятся как кубы соответствующих линейных размеров.

Задачи

Пункт 66

1. Три латунных куба с ребрами 3 см, 4 см и 5 см переплавлены в один куб. Какое ребро у этого куба?
2. Металлический куб имеет внешнее ребро 10,2 см и массу 514,15 г. Толщина стенок равна 0,1 см. Найдите плотность металла, из которого сделан куб.
3. Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^3. Чему равно ребро куба?
4. Если каждое ребро куба увеличить на 1 м, то его объем увеличится в 125 раз. Найдите ребро.
5. Кирпич размером $25 \times 12 \times 6{,}5$ см имеет массу 3,51 кг. Найдите его плотность.
6. Требуется установить резервуар для воды емкостью 10 м^3 на площадке размером $2{,}5 \times 1{,}75$ м, служащей для него дном. Найдите высоту резервуара.
7. Измерения прямоугольного параллелепипеда 15 м, 50 м и 36 м. Найдите ребро равновеликого ему куба.
8. Измерения прямоугольного бруска 3 см, 4 см, 5 см. Если увеличить каждое ребро на x сантиметров, то поверхность увеличится на 54 см^2. Как увеличится объем?
9. Чугунная труба имеет квадратное сечение, ее внешняя ширина 25 см, толщина стенок 3 см. Какова масса одного погонного метра трубы (плотность чугуна 7,3 г/см^3)?
10. Чему равен объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого a составляет с плоскостью основания угол α, а с боковой гранью угол β?

Пункт 67

11. В прямом параллелепипеде стороны основания a и b образуют угол 30°. Боковая поверхность равна S. Найдите его объем.
12. В прямом параллелепипеде стороны основания $2\sqrt{2}$ см и 5 см образуют угол 45°. Меньшая диагональ параллелепипеда равна 7 см. Найдите его объем.
13. Основание прямого параллелепипеда — ромб, площадь которого 1 м^2. Площади диагональных сечений 3 м^2 и 6 м^2. Найдите объем параллелепипеда.
14. Решите предыдущую задачу в общем случае, если площадь ромба Q, а площади диагональных сечений M и N.
15. Основание наклонного параллелепипеда — квадрат, сторона которого равна 1 м. Одно из боковых ребер равно 2 м

и образует с каждой из прилежащих сторон основания угол 60°. Найдите объем параллелепипеда.

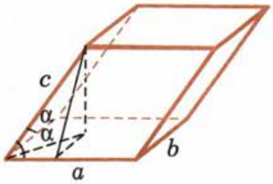


Рис. 175

16. Грани параллелепипеда — равные ромбы со стороной a и острым углом 60°. Найдите объем параллелепипеда.

17. Каждое ребро параллелепипеда равно 1 см. У одной из вершин параллелепипеда все три плоских угла острые, по 2α каждый. Найдите объем параллелепипеда.

18. В параллелепипеде длины трех ребер, исходящих из одной вершины, равны a, b, c. Ребра a и b взаимно перпендикулярны, а ребро c образует с каждым из них угол α (рис. 175). Найдите объем параллелепипеда.

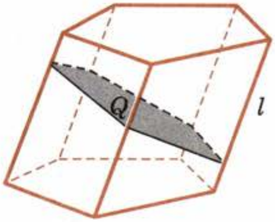


Рис. 176

Пункт 68

19. По стороне основания a и боковому ребру b найдите объем правильной призмы: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

20. Деревянная плита в форме правильного восьмиугольника со стороной 3,2 см и толщиной 0,7 см имеет массу 17,3 г. Найдите плотность дерева.

21. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 3,5 см, а диагональ боковой грани 2,5 см. Найдите объем призмы.

22. Сторона основания правильной треугольной призмы равна a, боковая поверхность равновелика сумме оснований. Найдите ее объем.

23. В правильной шестиугольной призме площадь наибольшего диагонального сечения 4 м^2, а расстояние между двумя противоположными боковыми гранями 2 м. Найдите объем призмы.

24. В наклонной призме проведено сечение, перпендикулярное боковым ребрам и пересекающее все боковые ребра. Найдите объем призмы, если площадь сечения Q, а боковые ребра равны l (рис. 176).

25. Боковые ребра наклонной треугольной призмы равны 15 м, а расстояния между содержащими их параллельными прямыми равны 26 м, 25 м и 17 м. Найдите объем призмы.

26. Вычислите пропускную способность (в кубических метрах за 1 ч) водосточной трубы, сечение которой имеет вид равнобедренного треугольника с основанием 1,4 м и высотой 1,2 м. Скорость течения 2 м/с.

27. Сечение железнодорожной насыпи имеет вид трапеции с нижним основанием 14 м, верхним 8 м и высотой 3,2 м. Найдите, сколько кубических метров земли приходится на 1 км насыпи.

28. В прямой треугольной призме стороны оснований равны 4 см, 5 см и 7 см, а боковое ребро равно большей высоте основания. Найдите объем призмы.

29. Площадь основания прямой треугольной призмы равна 4 см^2, а площади боковых граней 9 см^2, 10 см^2 и 17 см^2. Найдите объем призмы.

30. Основание призмы — треугольник, у которого одна сторона равна 2 см, а две другие по 3 см. Боковое ребро равно 4 см и составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите ребро равновеликого куба.

31. Основанием наклонной призмы является равносторонний треугольник со стороной a; одна из боковых граней перпендикулярна основанию и является ромбом, у которого меньшая диагональ равна c. Найдите объем призмы.

32. Чему равен объем прямой четырехугольной призмы, если ее высота h, диагонали наклонены к плоскости основания под углами α и β и острый угол между диагоналями основания равен γ?

Пункт 70

33. По стороне основания a и боковому ребру b найдите объем правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

34. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды a, а двугранный угол при основании равен 45°. Найдите объем пирамиды.

35. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое равно b (рис. 177). Найдите объем пирамиды.

36. Чему равен объем правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания a, а боковые ребра взаимно перпендикулярны?

37. По ребру a правильного тетраэдра найдите его объем.

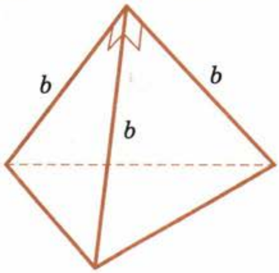


Рис. 177

38. По ребру a октаэдра найдите его объем.

39. Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 9 м и 12 м, все боковые ребра равны 12,5 м. Найдите объем пирамиды.

40. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник со сторонами 6 см, 6 см и 8 см. Все боковые ребра равны 9 см. Найдите объем пирамиды.

41. Одно ребро треугольной пирамиды равно 4 см, каждое из остальных 3 см. Найдите объем пирамиды.

42. В основании пирамиды лежит прямоугольник. Каждое боковое ребро пирамиды равно l и составляет со смежными сторонами прямоугольника углы α и β. Найдите объем пирамиды.

43. Найдите объем пирамиды, имеющей основанием треугольник, два угла которого α и β, радиус описанного круга R. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости ее основания под углом γ.

Пункт 71

44. Найдите объем усеченной пирамиды с площадями оснований Q_1 и Q_2 ($Q_1 > Q_2$) и высотой h.

45. В пирамиде с площадью основания Q_1 проведено сечение, параллельное основанию, на расстоянии h от него. Площадь сечения равна Q_2. Найдите высоту пирамиды.

46. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде стороны нижнего и верхнего оснований равны a и b, а двугранный угол при ребре нижнего основания равен α. Найдите объем пирамиды.

47. Решите предыдущую задачу в случае правильной усеченной треугольной пирамиды.

Пункт 72

48. Через середину высоты пирамиды проведена плоскость, параллельная основанию. В каком отношении она делит объем пирамиды?

49. Высота пирамиды h. На каком расстоянии от вершины пирамиды находится сечение, параллельное основанию и делящее ее объем пополам?

§ 8 Объемы и поверхности тел вращения

73. Объем цилиндра

Если тело простое, т. е. допускает разбиение на конечное число треугольных пирамид, то его объем равен сумме объемов этих пирамид. Для произвольного тела объем определяется следующим образом.

Данное тело имеет объем V, если существуют содержащие его простые тела и содержащиеся в нем простые тела с объемами, сколь угодно мало отличающимися от V.

Применим это определение к нахождению объема цилиндра с радиусом основания R и высотой H.

При выводе формулы для площади круга были построены такие два n-угольника (один — содержащий круг, другой — содержащийся в круге), что их площади при неограниченном увеличении n неограниченно приближались к площади круга. Построим такие многоугольники для круга в основании цилиндра. Пусть P — многоугольник, содержащий круг, а P' — многоугольник, содержащийся в круге (рис. 178).

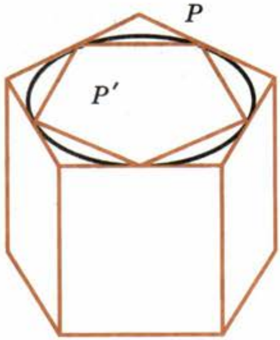


Рис. 178

Построим две прямые призмы с основаниями P и P' и высотой H, равной высоте цилиндра. Первая призма содержит цилиндр, а вторая призма содержится в цилиндре. Так как при неограниченном увеличении n площади оснований призм неограниченно приближаются к площади основания цилиндра S, то их объемы неограниченно приближаются к SH. Согласно определению объем цилиндра $V = SH = \pi R^2 H$. Итак,

объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.

74. Объем конуса

Построим два многоугольника в плоскости основания конуса: многоугольник P, содержащий основание конуса, и многоугольник P', содержащийся в основании конуса (рис. 179). Построим

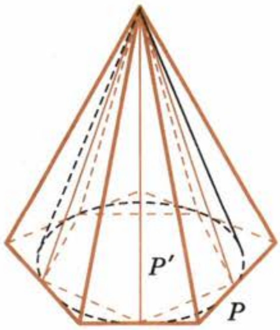


Рис. 179

две пирамиды с основаниями P и P' и вершиной в вершине конуса. Первая пирамида содержит конус, а вторая пирамида содержится в конусе.

Как мы знаем, существуют такие многоугольники P и P', площади которых при неограниченном увеличении числа их сторон n неограниченно приближаются к площади круга в основании конуса. Для таких многоугольников объемы построенных пирамид неограниченно приближаются к $\frac{1}{3}SH$, где S — площадь основания конуса, а H — его высота. Согласно определению отсюда следует, что объем конуса

$$V = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

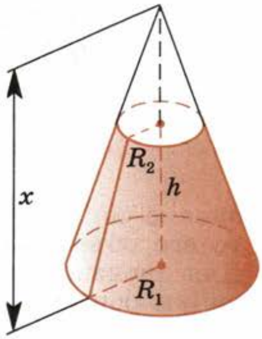


Рис. 180

Итак,

объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

75. Объем усеченного конуса

Задача (15).

Найдите объем усеченного конуса, у которого радиусы оснований равны R_1 и R_2 ($R_2 < R_1$), а высота h.

Решение.

Дополним данный усеченный конус до полного (рис. 180). Пусть x — его высота. Объем усеченного конуса равен разности объемов двух полных конусов: одного с радиусом основания R_1 и высотой x, другого с радиусом основания R_2 и высотой $x - h$.

Из подобия конусов находим x:

$$\frac{x}{x-h} = \frac{R_1}{R_2},\ x = \frac{hR_1}{R_1 - R_2}.$$

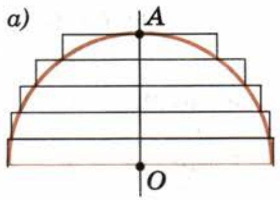
Объем усеченного конуса равен:

$$V = \frac{1}{3}\left[\pi R_1^2 \frac{hR_1}{R_1 - R_2} - \pi R_2^2\left(\frac{hR_1}{R_1 - R_2} - h\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\pi h \frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1 - R_2} = \frac{1}{3}\pi h\,(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2).$$

76. Объем шара

Найдем сначала объем полушара (рис. 181). Разделим радиус OA на большое число n равных частей. Проведем через точки деления плоскости, параллельные основанию полушара. Эти плоскости разбивают полушар на слои толщиной $\frac{R}{n}$. Построим для каждого слоя цилиндр, содержащий слой. Обозначим тело, составленное из цилиндров, через T'. Полушар содержится внутри тела T' (рис. 181, *а*). Поэтому тело T' имеет объем V', больший объема V полушара. Опустим тело T' вниз на расстояние $\frac{R}{n}$. Тогда все цилиндры тела T', начиная со второго, считая снизу, окажутся внутри полушара (рис. 181, *б*). Обозначим тело, составленное из этих цилиндров, через T''. Объем V'' тела T'' меньше объема полушара. Итак, имеем неравенство $V' > V > V''$, $V' - V'' = \pi R^2 \frac{R}{n}$, где $\pi R^2 \frac{R}{n}$ — объем первого цилиндра тела T'.



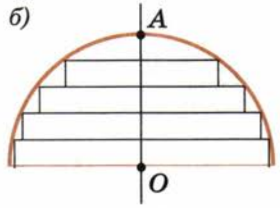


Рис. 181

Поскольку при достаточно большом n величина $\frac{\pi R^3}{n}$ сколь угодно мало отличается от нуля, то объем полушара V сколь угодно мало отличается от объема V' тела T'.

Найдем объем V'. Радиус BC m-го цилиндра тела T' определяется по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника OBC (рис. 182):

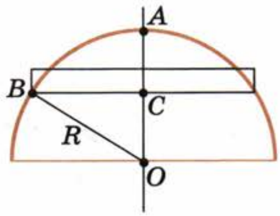


Рис. 182

$$BC^2 = R^2 - \left(\frac{m-1}{n}R\right)^2.$$

Объем цилиндра равен $\pi BC^2 \frac{R}{n}$. Объем тела T' равен сумме объемов цилиндров, составляющих его.

$$V' = \pi R^2 \frac{R}{n} + \pi\left(R^2 - \frac{R^2}{n^2}\right)\frac{R}{n} + \pi\left(R^2 - \frac{2^2 R^2}{n^2}\right)\frac{R}{n} + \ldots +$$

$$+ \pi\left(R^2 - \frac{(n-1)^2 R^2}{n^2}\right)\frac{R}{n} = \pi R^3 - \frac{\pi R^3}{n^3}\left(1 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right).$$

Обозначим $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 = \sigma$. Найдем величину σ. Имеем тождества

$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$, $k = 1, 2, 3, \ldots, (n-1)$.

Сложим почленно все эти тождества. Тогда в левой части получим $n^3 - 1$. Остальные слагаемые взаимно сокращаются. В правой части получим

$$3\sigma + 3(1 + 2 + \ldots + (n - 1)) + (n - 1).$$

Заметим, что $1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Итак, $n^3 - 1 = 3\sigma + 3\frac{(n-1)n}{2}. + (n - 1)$. Отсюда находим

$$\sigma = \frac{n^3 - 1 - \frac{3}{2}n(n-1) - (n-1)}{3}.$$

Подставим это выражение σ в формулу для V'. Тогда получим

$$V' = \pi R^3\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right).$$

Мы видим, что при достаточно больших n значение V' сколь угодно мало отличается от $\frac{2}{3}\pi R^3$. А так как V' сколь угодно мало отличается от объема полушара, то объем полушара равен $\frac{2}{3}\pi R^3$, а значит, объем шара $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Итак,

объем шара радиуса R вычисляется по формуле

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

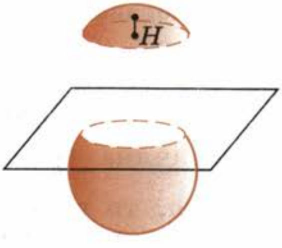


Рис. 183

77. Объем шарового сегмента и сектора

Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая от него плоскостью (рис. 183).

Объем шарового сегмента вычисляется по формуле

$$V = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right),$$

где R — радиус шара, а H — высота шарового сегмента.

Эта формула сначала выводится для случая, когда сегмент меньше полушара ($H < R$). При этом доказательство такое же, как для полушара. Разница только в том, что вместо полушара берется шаровой сегмент.

Шаровым сектором называется тело, которое получается из шарового сегмента и конуса следующим образом. В случае когда сегмент меньше полушара, шаровой сектор получается дополнением этого сегмента конусом с тем же основанием, которое у сегмента, и вершиной в центре шара (рис. 184).

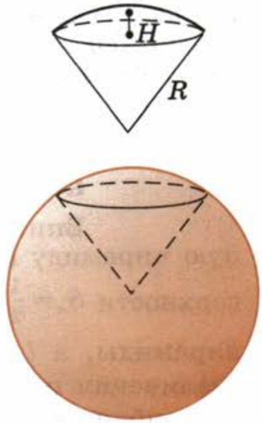


Рис. 184

В случае сегмента большего полушара шаровой сектор получается из этого сегмента удалением из него конуса, у которого основанием служит основание сегмента, а вершина в центре шара.

Объем шарового сектора определяется по формуле

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H,$$

где R — радиус шара, а H — высота соответствующего шарового сегмента.

Эта формула получается с помощью формул для объемов шарового сегмента и конуса.

78. Площадь боковой поверхности цилиндра

Впишем в цилиндр правильную n-угольную призму (рис. 185). Площадь боковой поверхности этой призмы $S_n = P_n H$, где P_n — периметр основания призмы, а H — ее высота.

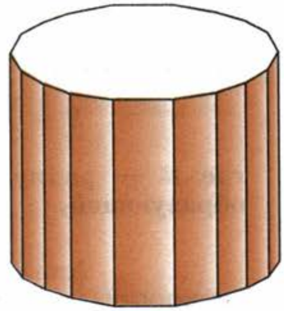


Рис. 185

Как мы знаем, при неограниченном увеличении n периметр P_n неограниченно приближается к длине C окружности основания цилиндра. Следовательно, площадь боковой поверхности призмы неограниченно приближается к CH. Поэтому величина CH принимается за площадь боковой поверхности цилиндра.

Таким образом,

площадь боковой поверхности цилиндра вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{S = CH = 2\pi RH,}$$

где R — радиус цилиндра, а H — его высота.

Если боковую поверхность цилиндра с радиусом основания R и высотой H разрезать по образующей и без деформаций развернуть на плоскость, то получится прямоугольник, основание которого равно $2\pi R$, а высота — H. Площадь развертки боковой поверхности цилиндра вычисляется по формуле $S = 2\pi RH$.

79. Площадь боковой поверхности конуса

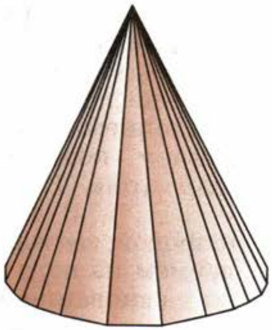


Рис. 186

Впишем в конус правильную n-угольную пирамиду (рис. 186). Площадь ее боковой поверхности $S_n = \frac{1}{2} P_n l_n$, где P_n — периметр основания пирамиды, а l_n — апофема. При неограниченном увеличении n периметр основания P_n неограниченно приближается к длине C окружности основания конуса, а апофема l_n — к длине l образующей. Соответственно боковая поверхность пирамиды неограниченно приближается к $C\frac{l}{2}$. В связи с этим величина $C\frac{l}{2}$ принимается за площадь боковой поверхности конуса.

Итак,

площадь боковой поверхности конуса вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} Cl = \pi Rl,$$

где R — радиус основания конуса, а l — длина образующей.

Аналогично для площади боковой поверхности усеченного конуса с радиусами оснований R_1, R_2 и образующей l получается формула

$$S = \pi(R_1 + R_2)l.$$

Если боковую поверхность конуса с радиусом основания R и образующей l разрезать по образующей и без деформаций развернуть на плоскость, то получится круговой сектор, представляющий собой часть круга радиуса l, ограниченного двумя радиусами и дугой окружности длины $2\pi R$. Площадь развертки боковой поверхности конуса вычисляется по формуле $S = \pi Rl$, где R — радиус основания конуса, а l — его образующая.

80. Площадь сферы

Опишем около сферы выпуклый многогранник с малыми гранями (рис. 187). Пусть S' — площадь поверхности многогранника, т. е. сумма площадей его граней. Найдем приближенное значение площади поверхности многогранника, предполагая, что линейные размеры граней, т. е. расстояние между любыми двумя точками любой грани, меньше ε.

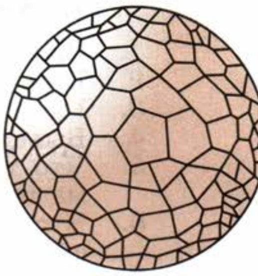


Рис. 187

Объем многогранника равен сумме объемов пирамид, имеющих своими основаниями грани многогранника, а вершиной — центр сферы (рис. 188). Так как все пирамиды имеют одну и ту же высоту, равную радиусу R сферы, то объем многогранника

$$V = \frac{1}{3}S'R.$$

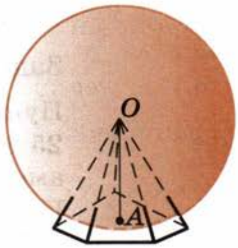


Рис. 188

Объем многогранника больше объема шара, ограниченного сферой, но меньше объема шара с тем же центром и радиусом $R + \varepsilon$. Таким образом,

$$\frac{4}{3}\pi R^3 < \frac{1}{3}S'R < \frac{4}{3}\pi(R + \varepsilon)^3.$$

Отсюда

$$4\pi R^2 < S' < 4\pi (R + \varepsilon)^2\left(1 + \frac{\varepsilon}{R}\right).$$

Мы видим, что площадь поверхности описанного многогранника при неограниченном уменьшении размеров его граней, т. е. при неограниченном уменьшении ε, стремится к $4\pi R^2$. Поэтому величина $4\pi R^2$ принимается за площадь сферы.

Итак,

площадь сферы радиуса R вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{S = 4\pi R^2}.$$

Аналогично определяется площадь сферической части поверхности шарового сектора, т. е. площадь сферического сегмента, для нее получается формула

$$S = 2\pi RH,$$

где H — высота сегмента.

Контрольные вопросы

1. Выведите формулу для объема цилиндра.
2. Выведите формулу для объема конуса.
3. Выведите формулу для объема тел вращения.
4. Выведите формулу для объема шара.
5. Что такое шаровой сегмент? Выведите формулу для объема шарового сегмента.
6. Что такое шаровой сектор? По какой формуле вычисляется объем шарового сектора?
7. По какой формуле вычисляется площадь боковой поверхности цилиндра?
8. По какой формуле находится площадь боковой поверхности конуса (боковой поверхности усеченного конуса)?
9. По какой формуле вычисляется площадь сферы?

Задачи

Пункт 73

1. 25 м медной проволоки имеют массу 100,7 г. Найдите диаметр проволоки (плотность меди 8,94 г/см^3).
2. Насос, подающий воду в паровой котел, имеет два водяных цилиндра. Диаметры цилиндров 80 мм, а ход поршня 150 мм. Чему равна часовая производительность насоса, если каждый поршень делает 50 рабочих ходов в минуту?
3. Во сколько раз надо увеличить высоту цилиндра, не меняя его основание, чтобы объем увеличился в n раз? Во сколько раз надо увеличить радиус основания цилиндра, не меняя высоту, чтобы объем увеличился в n раз?
4. В цилиндр вписана правильная треугольная призма, а в призму вписан цилиндр. Найдите отношение объемов цилиндров.
5. Найдите объем цилиндра, вписанного в правильную шестиугольную призму, у которой каждое ребро равно a.
6. Свинцовая труба (плотность свинца 11,4 г/см^3) с толщиной стенок 4 мм имеет внутренний диаметр 13 мм. Какова масса 25 м этой трубы?

Пункт 74

7. Куча щебня имеет коническую форму, радиус основания которой 2 м, а образующая 2,5 м. Найдите объем кучи щебня.
8. Осевым сечением конуса является равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого 9 м^2. Найдите объем конуса.
9. Длина образующей конуса равна l, а длина окружности основания c. Найдите объем конуса.

10. Образующая конуса l составляет с плоскостью основания угол α. Найдите объем конуса.

11. Стог сена имеет форму цилиндра с коническим верхом. Радиус его основания 2,5 м, высота 4 м, причем цилиндрическая часть стога имеет высоту 2,2 м. Плотность сена 0,03 г/см^3. Определите массу стога сена.

12. Жидкость, налитая в конический сосуд высотой 0,18 м и диаметром основания 0,24 м, переливается в цилиндрический сосуд, диаметр основания которого 0,1 м. Как высоко будет стоять уровень жидкости в сосуде?

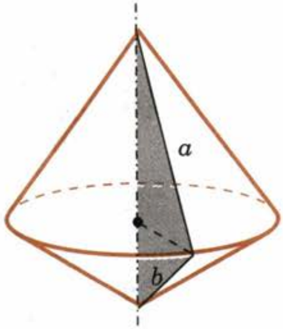


Рис. 189

13. Равносторонний треугольник вращается вокруг своей стороны a. Найдите объем полученного тела вращения.

14. Прямоугольный треугольник с катетами a и b вращается около гипотенузы. Найдите объем полученного тела (рис. 189).

Пункт 75

15. Найдите объем усеченного конуса, у которого радиусы оснований равны R_1 и R_2 ($R_2 < R_1$), а высота h.

16. Сосновое бревно длиной 15,5 м имеет диаметры концов 42 см и 25 см. Какую ошибку (в процентах) совершают, когда вычисляют объем бревна, умножая его длину на площадь поперечного сечения в середине бревна?

17. Радиусы оснований усеченного конуса R и r, образующая наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем.

18. Площадь осевого сечения усеченного конуса равна разности площадей оснований, а радиусы оснований R и r. Найдите объем этого конуса.

19. Усеченный конус, у которого радиусы оснований 4 см и 22 см, и равновеликий цилиндр имеют одну и ту же высоту. Чему равен радиус основания этого цилиндра?

20. По данным радиусам оснований R и r определите отношение объемов усеченного конуса и полного конуса.

Пункт 76

21. Чугунный шар регулятора имеет массу 10 кг. Найдите диаметр шара (плотность чугуна 7,2 г/см^3).

22. Требуется переплавить в один шар два чугунных шара с диаметрами 25 см и 35 см. Найдите диаметр нового шара.

23. Имеется кусок свинца массой 1 кг. Сколько шариков диаметром 1 см можно отлить из куска (плотность свинца 11,4 г/см^3)?

24. Из деревянного цилиндра, высота которого равна диаметру основания, выточен наибольший шар. Сколько процентов материала сточено?

25. Внешний диаметр полого шара 18 см. Толщина стенок 3 см. Найдите объем материала, из которого изготовлен шар.

26. Сосуд имеет форму полушара радиуса R, дополненного цилиндром. Какой высоты должна быть цилиндрическая часть, чтобы сосуд имел объем V?

Пункт 77

27. Плоскость, перпендикулярная диаметру шара, делит его на части 3 см и 9 см. На какие части делится объем шара?

28. Какую часть объема шара составляет объем шарового сегмента, у которого высота равна 0,1 диаметра шара?

29. Два равных шара расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Как относится объем общей части шаров к объему целого шара?

30. Диаметр шара, равный 30 см, является осью цилиндра, у которого радиус основания равен 12 см. Найдите объем части шара, заключенной внутри цилиндра.

31. Чему равен объем шарового сектора, если радиус окружности его основания 60 см, а радиус шара 75 см?

32. Круговой сектор с углом 30° и радиусом R вращается около одного из боковых радиусов. Найдите объем полученного тела.

Пункт 80

33. Поверхности двух шаров относятся как $m : n$. Как относятся их объемы?

34. Гипотенуза и катеты треугольника являются диаметрами трех шаров. Какая существует зависимость между их поверхностями?

35. Поверхность тела, образуемого вращением квадрата около стороны, равновелика поверхности шара, имеющего радиусом сторону квадрата. Докажите.

36. Радиус шара 15 см. Какую площадь имеет часть его поверхности, видимая из точки, удаленной от центра на 25 см (рис. 190)?

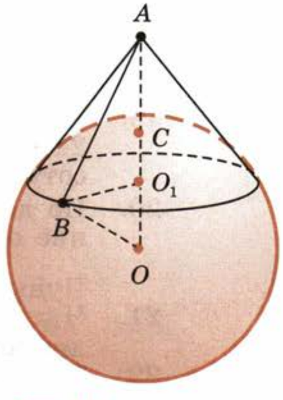


Рис. 190

37. Шар радиуса 10 см цилиндрически просверлен по оси. Диаметр отверстия 12 см. Найдите полную поверхность тела.

Пункт 78

38. Цилиндрическая дымовая труба с диаметром 65 см имеет высоту 18 м. Сколько жести нужно для ее изготовления, если на заклепку уходит 10% материала?

39. Полуцилиндрический свод подвала имеет 6 м длины и 5,8 м в диаметре. Найдите полную поверхность подвала.

40. Из круглого листа металла выштампован цилиндрический стакан диаметром 25 см и высотой 50 см. Предполагая, что площадь листа при штамповке не изменилась, найдите диаметр листа.

41. В цилиндре площадь основания Q, а площадь осевого сечения M. Чему равна полная поверхность цилиндра?

Пункт 79

42. Конусообразная палатка высотой 3,5 м с диаметром основания 4 м покрыта парусиной. Сколько квадратных метров парусины пошло на палатку?

43. Крыша силосной башни имеет форму конуса. Высота крыши 2 м, диаметр башни 6 м. Найдите поверхность крыши.

44. Площадь основания конуса S, а образующие наклонены к плоскости основания под углом α. Найдите боковую поверхность конуса.

45. Как относятся между собой боковая и полная поверхности равностороннего конуса (в сечении правильный треугольник)?

46. Полная поверхность равностороннего конуса равновелика поверхности шара, построенного на его высоте как на диаметре. Докажите.

47. Полукруг свернут в коническую поверхность. Найдите угол между образующей и осью конуса.

48. Радиус кругового сектора равен 3 м, его угол 120°. Сектор свернут в коническую поверхность. Найдите радиус основания конуса.

49. Сколько квадратных метров латунного листа потребуется, чтобы сделать рупор, у которого диаметр одного конца 0,43 м, другого конца 0,036 м и образующая 1,42 м?

50. Сколько олифы потребуется для окраски внешней поверхности 100 ведер, имеющих форму усеченного конуса с диаметрами оснований 25 см и 30 см и образующей 27,5 см, если на 1 м^2 требуется 150 г олифы?

§ 9 Избранные вопросы планиметрии

81. Решение треугольников

Решение треугольников состоит в нахождении неизвестных сторон и углов по известным его углам и сторонам. Будем обозначать стороны треугольника через a, b, c, а противолежащие им углы через α, β, γ (рис. 191). Основными средствами для решения произвольных треугольников являются теорема косинусов и теорема синусов. Напомним их формулировки.

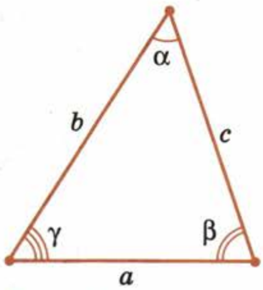


Рис. 191

Теорема косинусов

Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Рассмотрим типовые задачи на решение треугольников.

Задача 9.1.

Даны сторона и два угла треугольника. Найти третий угол и остальные две стороны.

Решение.

Так как сумма углов треугольника равна 180°, то третий угол выражается через заданные углы. Имея сторону и все три угла, по теореме синусов находим две остальные стороны. Задача всегда имеет решение, и притом единственное. Конечно, сумма двух данных углов должна быть меньше 180°. Единственность решения следует из второго признака равенства треугольников.

Задача 9.2.

Даны две стороны, например a и b, и угол γ между ними. Найти остальные два угла и третью сторону.

Решение.

По теореме косинусов находим сторону c. Теперь, имея три стороны и угол, по теореме косинусов можно найти косинусы остальных углов и сами углы. Проще, однако, воспользоваться теоремой синусов и найти синусы неизвестных углов. При этом надо иметь в виду, что для данного значения синуса получаются два угла. Поэтому из полученных углов надо взять те, которые удовлетворяют известным соотношениям: сумма углов треугольника равна 180°, против большей стороны лежит больший угол. Задача всегда имеет решение, и притом единственное. Единственность решения следует из первого признака равенства треугольников.

Задача 9.3.

Даны две стороны, например a, b, и угол, противолежащий одной из них, например α. Найти остальные два угла и третью сторону.

Решение.

По теореме синусов находим $\sin\beta$. По $\sin\beta$ находим отвечающие ему углы β_1 и β_2. Выбираем из них один или оба, имея в виду, что против большей из сторон a и b лежит больший угол. Зная углы α и β, находим угол $\gamma = 180° - \alpha - \beta$, а затем сторону c по теореме синусов. Эта задача в отличие от двух предыдущих может не иметь решения, иметь одно решение или два решения.

Задача 9.4.

Даны три стороны треугольника. Найти его углы.

Решение.

По теореме косинусов находим один из углов. А затем поступаем так, как в задаче 9.2. Эта задача имеет решение, если бóльшая из сторон меньше суммы двух других. Единственность решения следует из третьего признака равенства треугольников. Приведем один пример.

Задача (3).

В треугольнике заданы две стороны и угол, противолежащий одной из них. Найдите остальные углы и сторону треугольника, если $a = 6$, $b = 8$, $\alpha = 30°$.

Решение.

По теореме синусов находим $\sin\beta$:

$$\sin\beta = \frac{b}{a} \cdot \sin\alpha = \frac{8}{6} \cdot \sin 30° \approx 0{,}667.$$

Этому значению синуса соответствуют два угла: $\beta_1 \approx 42°$ и $\beta_2 \approx 138°$.

Рассмотрим сначала угол $\beta_1 \approx 42°$. По нему находим третий угол $\gamma_1 = 180° - \alpha - \beta_1 \approx 108°$ и по теореме синусов третью сторону:

$$c_1 = \frac{a \cdot \sin\gamma_1}{\sin\alpha} \approx 6 \cdot \frac{\sin 108°}{\sin 30°} \approx 6 \cdot \frac{0{,}951}{0{,}500} \approx 11{,}4.$$

Аналогично по углу $\beta_2 \approx 138°$ находим $\gamma_2 \approx 12°$ и $c_2 \approx 2{,}49$.

Замечание. Мы видим, что эта задача имеет два решения (рис. 192). При других численных данных, например при $\alpha \geqslant 90°$, задача может иметь лишь одно решение или вовсе не иметь решений.

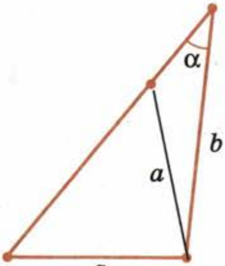


Рис. 192

82. Вычисление биссектрис и медиан треугольника

Зная длины сторон треугольника, можно вычислить его биссектрисы, медианы и высоты, используя при этом их определения и свойства.

Теорема (свойство биссектрисы треугольника)

9.1

Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

Доказательство.

Пусть CD — биссектриса треугольника, проведенная из вершины C (рис. 193). По теореме синусов из треугольников ADC и BDC получаем

$$\frac{AD}{\sin\frac{ACB}{2}} = \frac{AC}{\sin ADC}, \quad \frac{BD}{\sin\frac{ACB}{2}} = \frac{BC}{\sin BDC}.$$

Так как $\angle ADC + \angle BDC = 180°$, то $\sin ADC = \sin BDC$. Следовательно,

$$\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC},$$

т. е. отрезки AD и BD пропорциональны сторонам AC и BC треугольника. Теорема доказана.

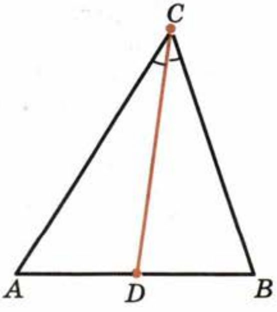


Рис. 193

Докажем теперь, что

если стороны треугольника равны a, b и c, то его биссектрисы l_a, l_b и l_c, проведенные к этим сторонам, вычисляются по формулам:

$$l_a = \frac{\sqrt{bc\left((b+c)^2 - a^2\right)}}{b+c},\ l_b = \frac{\sqrt{ac\left((a+c)^2 - b^2\right)}}{a+c},$$

$$l_c = \frac{\sqrt{ab\left((a+b)^2 - c^2\right)}}{a+b}.$$

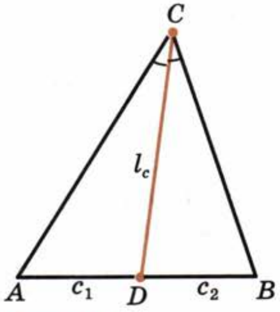


Рис. 194

Пусть CD — биссектриса треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$ и $BC = a$, проведенная к стороне AB, которую она делит на отрезки $AD = c_1$ и $BD = c_2$ (рис. 194). Применяя теорему косинусов к треугольникам BCD и ACD, имеем

$$a^2 = l_c^{\,2} + c_2^{\,2} - 2c_2 \cdot l_c \cos BDC,$$
$$b^2 = l_c^{\,2} + c_1^{\,2} - 2c_1 \cdot l_c \cos ADC.$$

Умножим эти равенства на c_1 и c_2 соответственно и сложим почленно. С учетом условия $c_1 + c_2 = c$ и равенства $\angle ADC + \angle BDC = 180°$ получаем

$$a^2c_1 + b^2c_2 = c(l_c^{\,2} + c_1c_2).$$

Так как по теореме 9.1 отрезки c_1 и c_2 пропорциональны сторонам b и a, то $c_1 = kb$, $c_2 = ka$, где $k = \frac{c_1}{b} = \frac{c_2}{a}$. Отсюда по свойству пропорции имеем $k = \frac{c_1 + c_2}{b + a} = \frac{c}{a+b}$. И значит,

$$c_1 = \frac{bc}{a+b},\ c_2 = \frac{ac}{a+b}.$$

Подставляя эти значения в уравнение для l_c^2, получаем

$$\frac{a^2bc}{a+b} + \frac{b^2ac}{a+b} = c\left(l_c^2 + \frac{abc^2}{(a+b)^2}\right)$$

или после упрощения

$$ab = l_c^2 + \frac{abc^2}{(a+b)^2}.$$

Отсюда и следует указанная выше формула для биссектрисы l_c. Первые две формулы для вычисления l_a и l_b доказываются аналогично.

Теорема

9.2

Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Доказательство.

Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм, AC и BD — его диагонали (рис. 195). Применяя теорему косинусов к треугольникам ABC и BCD, получаем:

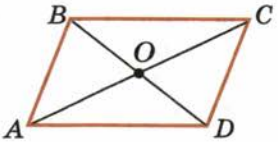


Рис. 195

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos ABC,$$
$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2CD \cdot BC\cos BCD.$$

По свойству противолежащих сторон параллелограмма $AB = CD$, а $\cos ABC = -\cos BCD$ (так как сумма углов B и C параллелограмма равна 180°). Поэтому, складывая полученные равенства почленно, получим

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + 2BC^2 + CD^2$$

или

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + AD^2 + CD^2.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 9.2 следует, что

если стороны треугольника равны a, b и c, то его медианы m_a, m_b и m_c, проведенные к этим сторонам, вычисляются по формулам:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2},\ m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(a^2 + c^2\right) - b^2},$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(a^2 + b^2\right) - c^2}.$$

Действительно, так как диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения O делятся пополам (см. рис. 195), то BO — медиана треугольника ABC и диагональ $BD = 2BO$. Поэтому по теореме 9.2

$$AC^2 + 4BO^2 = AB^2 + BC^2 + AD^2 + CD^2 = 2(AB^2 + BC^2).$$

Полагая $AC = b$, $BO = m_b$, $AB = c$, $BC = a$, имеем

$$b^2 + 4m_b{}^2 = 2(c^2 + a^2),$$

откуда следует указанная выше формула для медианы m_b. Другие две формулы для вычисления медиан m_a и m_c выводятся аналогично.

83. Формула Герона и другие формулы для площади треугольника

Теорема (формула Герона)

9.3

Площадь треугольника со сторонами a, b, c вычисляется по формуле

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ — полупериметр треугольника.

Доказательство.

Как известно, площадь треугольника со сторонами a, b, c вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma,$$

где γ — угол треугольника, противолежащий стороне c. По теореме косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Отсюда $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. Значит,

$$\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = (1 - \cos\gamma)(1 + \cos\gamma) =$$
$$= \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab} \cdot \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} =$$

$$= \frac{c^2 - (a-b)^2}{2ab} \cdot \frac{(a+b)^2 - c^2}{2ab} =$$
$$= \frac{1}{4a^2b^2}(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c).$$

Замечая, что $a + b + c = 2p$, $a + b - c = 2p - 2c$, $a + c - b = 2p - 2b$, $c - a + b = 2p - 2a$, получаем

$$\sin\gamma = \frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Таким образом,

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Теорема доказана.

Из формулы Герона следует, что

высоты h_a, h_b, h_c треугольника, опущенные на стороны a, b, c, вычисляются по формулам:

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$
$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$
$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Для доказательства достаточно заметить, что площадь треугольника вычисляется по любой из формул: $S = \frac{1}{2}ah_a$, $S = \frac{1}{2}bh_b$, $S = \frac{1}{2}ch_c$.

Теорема 9.4

Площадь треугольника со сторонами a, b, c и радиусом описанной окружности R или радиусом вписанной окружности r вычисляется по формулам:

$$S = \frac{abc}{4R}, \quad S = \frac{1}{2}(a + b + c)r.$$

Доказательство.

Начнем с первой формулы. Как мы знаем, $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$, где α — угол, противолежащий стороне a

треугольника. Умножая числитель и знаменатель правой части на bc и замечая, что $\frac{1}{2}bc\sin\alpha = S$, получаем $R = \frac{abc}{4S}$. Поэтому

$$S = \frac{abc}{4R},$$

что и требовалось доказать.

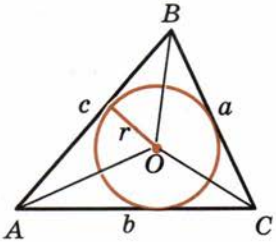


Рис. 196

Для доказательства второй формулы проведем отрезки, соединяющие центр O вписанной окружности с вершинами треугольника ABC (рис. 196). Площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников OAB, OBC, OCA. Значит,

$$S = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br = \frac{1}{2}(a + b + c)r.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 9.4 следует, что

радиус R окружности, описанной около треугольника со сторонами a, b, c, и радиус r окружности, вписанной в него, вычисляются по формулам:

$$R = \frac{abc}{4S}, \quad r = \frac{2S}{a+b+c},$$

где S — площадь треугольника.

84. Теорема Чевы

Теорема (Чевы)

9.5

Если отрезки AA', BB', CC', соединяющие вершины треугольника ABC с точками A', B', C' противолежащих сторон, пересекаются в одной точке, то

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1.$$

И обратно: **если A', B', C' — точки деления сторон BC, AC, AB треугольника ABC и для них выполняется соотношение**

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1,$$

то отрезки AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

Доказательство.

Пусть дан треугольник ABC и отрезки AA', BB', CC', пересекающиеся в точке M, которые соединяют вершины треугольника с точками A', B', C', лежащими на противолежащих сторонах (рис. 197). Так как площади двух треугольников с равными высотами пропорциональны их основаниям, то $\frac{AC'}{C'B} = \frac{S_{CAC'}}{S_{CBC'}} = \frac{S_{MAC'}}{S_{MBC'}}$.

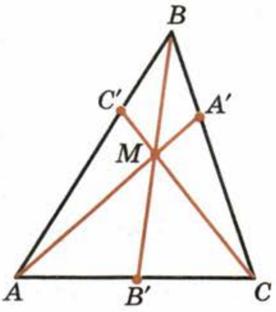


Рис. 197

По свойству пропорции имеем

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{S_{CAC'} - S_{MAC'}}{S_{CBC'} - S_{MBC'}} = \frac{S_{CAM}}{S_{BCM}}.$$

Аналогично получаем, что

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{S_{ABM}}{S_{CAM}}, \quad \frac{CB'}{B'A} = \frac{S_{BCM}}{S_{ABM}}.$$

Перемножая почленно эти три пропорции, имеем

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = \frac{S_{CAM}}{S_{BCM}} \cdot \frac{S_{ABM}}{S_{CAM}} \cdot \frac{S_{BCM}}{S_{ABM}} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Чтобы доказать обратное утверждение, предположим, что отрезки AA' и BB' пересекаются в точке M, а третьим отрезком, проходящим через точку M, будет CC_1. Тогда по доказанному

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1.$$

А по условию теоремы

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC'}{C'B},$$

и, значит, точка C_1 совпадает с точкой C' (так как обе они делят отрезок AB в одном и том же отношении). Таким образом, отрезки AA', BB', CC' пересекаются в одной точке. Теорема доказана.

Эта теорема названа по имени итальянского геометра Джованни Чевы, доказавшего ее в 1678 г.

Задача (17).

Докажите с помощью теоремы Чевы, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Решение.

Пусть AA', BB', CC' — медианы данного треугольника ABC. Тогда точки A', B', C' являются по определению серединами его сторон. Значит, $\frac{AC'}{C'B} = \frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = 1$. Поэтому произведение этих отношений также равно 1. По теореме Чевы (обратное утверждение) отсюда следует, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Замечание. Можно доказать, что теорема Чевы имеет место и в том случае, когда некоторые из точек A', B', C' лежат не на самих сторонах, а на их продолжениях. Но при этом надо учитывать, что прямые AA', BB', CC' могут быть и параллельными, т. е. могут «пересекаться в бесконечно удаленной точке».

85. Теорема Менелая

Пусть $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ — коллинеарные векторы. В этом пункте будем считать, что отношение длин отрезков AB и CD является положительным, если векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ одинаково направлены, и отрицательным — если они противоположно направлены. Так что $\frac{AB}{CD} = -\frac{BA}{CD}$.

Теорема (Менелая)

9.6

Если прямая, не проходящая через вершины треугольника ABC, пересекает его стороны AB, AC, BC или их продолжения в точках C', B' и A' соответственно, то

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = -1.$$

И обратно: если точки C', B' и A', не совпадающие с вершинами треугольника ABC, лежат на его сторонах AB, AC, BC или на их продолжениях и для них выполняется соотношение

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = -1,$$

то точки A', B' и C' лежат на одной прямой.

Доказательство.

Пусть дан треугольник ABC и прямая m, пересекающая его стороны или их продолжения в точках A', B' и C' (рис. 198). Проведем через вершину B прямую $l \parallel m$, пересекающую прямую AC в точке B_1.

По свойству пропорциональных отрезков для углов BAC и BCB' и параллельных m и l имеем:

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{AB'}{B'B_1}, \quad \frac{BA'}{A'C} = \frac{B'B_1}{CB'}.$$

Перемножая эти равенства почленно и учитывая, что точки A, C, B' и B_1 лежат на одной прямой, получаем

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} = \frac{AB'}{B'B_1} \cdot \frac{B'B_1}{CB'} = \frac{AB'}{CB'} = -\frac{B'A}{CB'}.$$

И значит,

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = -1,$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь точки C', B' и A' лежат на сторонах AB, AC, BC треугольника ABC или на их продолжениях и для них выполняется соотношение

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = -1.$$

Прямая $A'C'$ не параллельна прямой AC, так как в противном случае

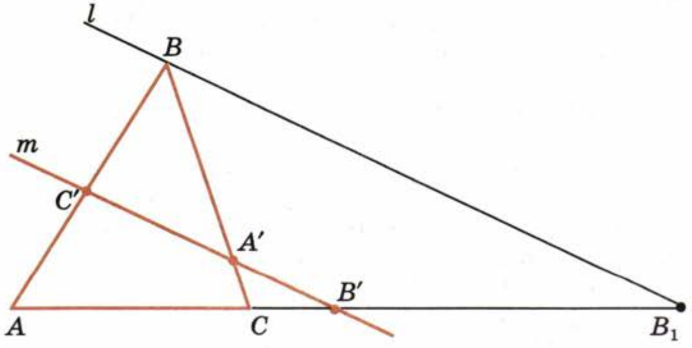


Рис. 198

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{CA'}{A'B} \text{ или } \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} = 1,$$

что противоречит условию теоремы. А значит, прямая $A'C'$ пересекает прямую AC в некоторой точке B_1. По доказанному выше

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = -1.$$

Сопоставляя это соотношение с условием, получаем

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CB'}{B'A}.$$

Отсюда следует, что точка B_1 совпадает с B' (так как в случае, когда отношение $\frac{CB_1}{B_1A}$ является положительным, обе они принадлежат отрезку AC, а в случае его отрицательности — обе они лежат на продолжении этого отрезка, причем по одну сторону от одного из его концов). Теорема доказана.

Эта теорема названа по имени древнегреческого ученого Менелая Александрийского (I в.). Но, по-видимому, она была известна Евклиду. Дело в том, что Менелай доказывал эту теорему для треугольников на сфере и при этом писал так, как будто аналогичное свойство плоских треугольников было уже хорошо известно.

Замечание.

Из теоремы Менелая следует, что прямая, не проходящая через вершины треугольника, не может пересекать все его стороны. Она пересекает либо две стороны и продолжение третьей, либо продолжения всех трех сторон, потому что произведение только нечетного числа отношений ориентированных отрезков может быть отрицательным (равным -1) числом.

86. Свойства и признаки вписанных и описанных четырехугольников

Многоугольник называется **вписанным** в окружность, если все его вершины лежат на некоторой окружности.

Теорема (свойство и признак вписанного четырехугольника)

9.7

У четырехугольника, вписанного в окружность, сумма противолежащих углов равна 180°. И обратно: если у выпуклого четырехугольника сумма противолежащих углов равна 180°, то около него можно описать окружность.

Доказательство.

Пусть дан четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность с центром O, и пусть его углы A и C — противолежащие (рис. 199). Вершины A и C четырехугольника $ABCD$ лежат по разные стороны от прямой BD, и, значит, четырехугольник выпуклый. По свойству вписанных углов

$$\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD,$$

где $\angle BOD$ — соответствующий центральный угол.

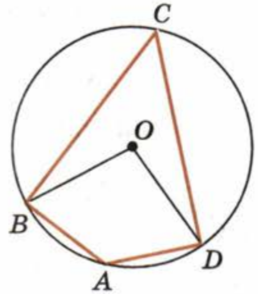


Рис. 199

И так как противолежащий ему угол BCD четырехугольника равен половине дополнительного центрального угла, то их сумма равна половине суммы дополнительных центральных углов, равной 360°. Следовательно,

$$\angle A + \angle C = 180°.$$

Сумма углов B и D данного четырехугольника также равна 180°, так как сумма всех углов четырехугольника равна 360°.

Для доказательства обратного утверждения достаточно описать окружность около треугольника ABD. Тогда четвертая вершина C данного четырехугольника $ABCD$, у которого

$$\angle A + \angle C = 180°,$$

тоже будет лежать на этой окружности. Это следует из того, что геометрическое место вершин углов BCD, равных $180° - \angle A$, лежащих в той же полуплоскости относительно прямой BD, что и вершина C, есть дуга окружности с концами в точках B и D. Теорема доказана.

Многоугольник называется **описанным** около окружности, если все его стороны касаются некоторой окружности.

Теорема (свойство и признак описанного четырехугольника)

9.8

В описанном четырехугольнике суммы противолежащих сторон равны. И обратно: **если в выпуклом четырехугольнике суммы противолежащих сторон равны, то в него можно вписать окружность.**

Доказательство.

Пусть стороны описанного четырехугольника $ABCD$ касаются окружности в точках K, L, M, N (рис. 200). По свойству касательных, проведенных к окружности из одной точки: $AK = AN$, $BK = BL$, $CL = CM$, $DM = DN$. Поэтому

$$(AK + KB) + (CM + MD) = (AN + ND) + (BL + LC).$$

т. е. $AB + CD = AD + BC$.

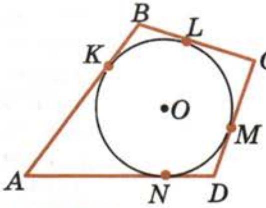


Рис. 200

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть для выпуклого четырехугольника $ABCD$ выполняется равенство

$$AB + CD = BC + AD. \qquad (*)$$

Среди окружностей, лежащих в четырехугольнике, найдется окружность F, касающаяся его сторон AB, BC и AD (рис. 201, *а*). Покажем, что окружность F касается и стороны CD. Допустим противное, т. е. окружность F не касается стороны CD. Тогда проведем из точки C луч p, который касается окружности F и пересекает сторону AD в точке K (рис. 201, *б*). Получим треугольник CDK. Окружность F вписана в четырехугольник $ABCK$. Поэтому

$$AB + CK = BC + AK. \qquad (**)$$

Вычитая равенство (**) из равенства (*), получаем, что

$$CD - CK = AD - AK.$$

Так как $AD - AK = KD$, то предыдущее равенство приводит к соотношению $CD = CK + KD$, которое противоречит неравенству треугольника. Следовательно, окружность касается и стороны CD, т. е. вписана в четырехугольник $ABCD$. Теорема доказана.

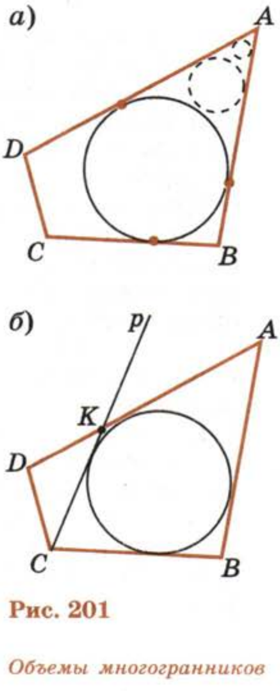


Рис. 201

87. Углы в окружности

Центральным углом в окружности называется плоский угол с вершиной в ее центре. При этом часть окружности, расположенная внутри плоского угла, называется **дугой окружности**, соответствующей этому центральному углу.

Теорема

9.9

1) Угол, вершина которого лежит внутри круга, равен полусумме двух центральных углов, которым соответствуют дуги окружности, заключенные между сторонами данного угла и их продолжениями.
2) Угол, вершина которого лежит вне круга, а стороны пересекают его окружность, равен полуразности двух центральных углов, которым соответствуют дуги окружности, заключенные между сторонами данного угла.

Доказательство.

Пусть вершина B угла ABC лежит внутри круга (рис. 202, *а*) или вне круга (рис. 202, *б*). Проведем хорду AD, где D — точка пересечения прямой BC с окружностью, отличная от точки C.

В первом случае угол B является внешним углом треугольника ABD и поэтому равен сумме углов A и D. Углы A и D как вписанные в окружность равны половинам соответствующих им центральных углов. Угол D равен половине центрального угла, соответствующей дугой окружности которого является дуга AC, заключенная между сторонами данного угла ABC, а угол A равен половине центрального угла, соответствующей дугой окружности которого является дуга DK, заключенная между продолжениями сторон угла ABC. Отсюда следует первое утверждение теоремы.

Во втором случае угол B является внутренним углом треугольника ABD и поэтому равен разности вписанных углов ADC и A. Угол ADC равен половине центрального угла, соответствующей дугой окружности которого является дуга AC, заключенная между сторонами данного угла ABC, а угол A равен половине центрального угла, соответствующей дугой окружности которого является дуга DK. Отсюда следует второе утверждение теоремы. Теорема доказана.

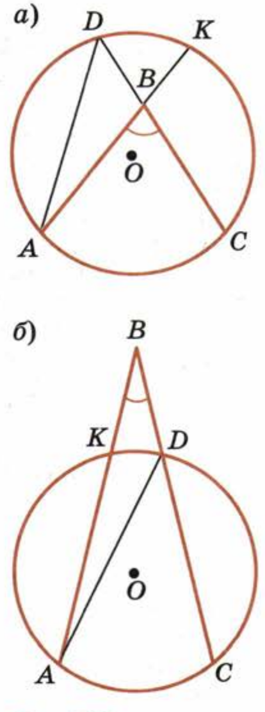


Рис. 202

Теорема

9.10

Если из точки B к окружности с центром O проведены касательная AB и хорда CB, то

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle BOC.$$

Доказательство.

Проведем диаметр BD окружности (рис. 203). Угол ABC равен или разности углов ABD и CBD (рис. 203, *а*), или их сумме (рис. 203, *б*). Так как угол ABD прямой, то он равен половине развернутого центрального угла. А вписанный угол CBD равен половине центрального угла COD. Поэтому данный угол ABC равен половине центрального угла, которому соответствует меньшая дуга BC окружности в случае *а* и большая дуга BC окружности в случае *б*.

Утверждение справедливо также и в случае, когда хорда BC является диаметром окружности. Теорема доказана.

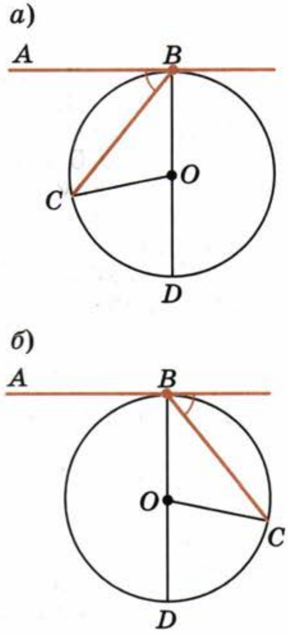


Рис. 203

Задача (35).

Дан треугольник ABC. Постройте геометрическое место точек, из которых отрезок AB виден под углом, равным углу A этого треугольника.

Решение.

Искомое геометрическое место точек является дугой окружности с концами в точках A и B (концах отрезка).

Чтобы найти центр этой окружности, проведем перпендикуляр к отрезку AB через его середину M и восстановим перпендикуляр к стороне AC данного треугольника (так как AC касательная) в вершине A (рис. 204).

Пусть O — точка их пересечения. Дуга окружности с центром в этой точке и радиусом OA, расположенная в верхней полуплоскости относительно прямой AB, является искомым геометрическим местом точек, так как любой вписанный в нее угол AXB равен половине центрального угла AOB и, значит, по теореме 9.10 равен углу A данного треугольника ABC.

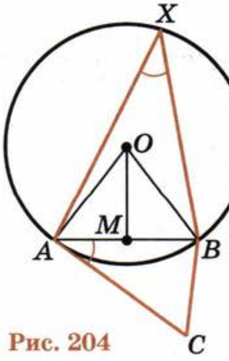


Рис. 204

88. Метрические соотношения в окружности

Теорема (свойство пересекающихся отрезков хорд окружности)

9.11

Если хорды AB и CD окружности пересекаются в точке S, то

$$AS \cdot BS = CS \cdot DS.$$

Доказательство.

Докажем сначала, что треугольники ASD и CSB подобны (рис. 205). Вписанные углы DCB и DAB равны, так как их вершины C и A лежат по одну сторону от прямой BD. А углы ASD и BSC равны как вертикальные. Из равенства указанных углов следует, что треугольники ASD и CSB подобны. Из подобия треугольников следует пропорция

$$\frac{DS}{BS} = \frac{AS}{CS}.$$

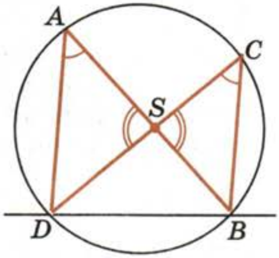


Рис. 205

Отсюда $AS \cdot BS = CS \cdot DS$. Теорема доказана.

Теорема (свойство отрезков секущей и касательной к окружности)

9.12

Произведение отрезков секущей окружности равно квадрату отрезка касательной, проведенной из той же точки.

Доказательство.

Пусть к данной окружности из точки C проведены касательная CD и секущая, пересекающая окружность в точках A и B (рис. 206). Соединим точку касания D с точками A и B отрезками. Треугольники CAD и CDB подобны. У них угол C общий, а угол B равен углу ADC по свойству вписанных углов и теореме 9.10. Из подобия треугольников следует, что

$$\frac{CD}{BC} = \frac{AC}{CD}.$$

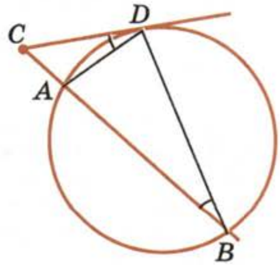


Рис. 206

Отсюда $CD^2 = AC \cdot BC$. Теорема доказана.

89. О разрешимости задач на построение

В задачах на построение речь идет о построении геометрической фигуры с помощью данных инструментов. В школьном курсе геометрии обычно рассматриваются построения с помощью циркуля и линейки. В частности, с помощью циркуля можно описать из данного центра окружность данного радиуса.

Задачи на построение с помощью циркуля и линейки часто бывают очень трудными для решения. К числу таковых относится, например, задача о построении трех окружностей, касающихся сторон данного треугольника и друг друга. Но бывают задачи, вообще не разрешимые с помощью циркуля и линейки. Такова, например, классическая задача древности **об удвоении куба:** построить ребро куба, объем которого в два раза больше объема данного куба.

Эта задача эквивалентна задаче о нахождении корня кубического уравнения $x^3 - 2 = 0$, где x — ребро куба, объем которого в два раза больше объема единичного куба. А поскольку это уравнение неразрешимо в квадратных радикалах, то и задача об удвоении куба неразрешима с помощью циркуля и линейки.

Другим примером классической задачи древности, не разрешимой с помощью циркуля и линейки, является задача **трисекции угла:** разделить данный угол на три равные части. Аналитически она сводится к решению уравнения третьей степени, которое в общем случае не имеет решения в квадратных радикалах.

В частности, угол в 60° нельзя разделить на три равные части с помощью циркуля и линейки, так как уравнение $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$, которое получается из формулы

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

при $\alpha = 20°$, не имеет решения в квадратных радикалах, что следует из формул Дж. Кардано (1501—1576) для корней кубического уравнения. Однако любой угол, равный $\frac{90°}{2^n}$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, с помощью циркуля и линейки можно разделить на три части (используя известный способ деления прямого угла на три равные части).

Еще одной классической задачей, не разрешимой с помощью циркуля и линейки, является задача о **квадратуре круга**: построить квадрат, равновеликий данному кругу. Но природа ее неразрешимости совершенно в другом, а именно в неразрешимости задачи о спрямлении окружности, т. е. в построении отрезка длины π (равного длине окружности диаметра 1).

90. Геометрические места точек в задачах на построение

Геометрическим местом точек называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, обладающих определенным свойством. И поскольку обычно рассматриваются только задачи на построение с помощью циркуля и линейки, то для нас представляют интерес только такие геометрические места точек, которые состоят из прямых и окружностей. Приведем некоторые из них.

1. Геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки, есть окружность с центром в этой точке (по определению).

2. Геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии от данной прямой, состоит из двух прямых, параллельных данной и отстоящих от нее на данном расстоянии (см. задачу 41 к §5 учебника 7—9 кл.).

3. Геометрическое место точек, равноотстоящих от двух данных точек, есть прямая, перпендикулярная отрезку с концами в данных точках, проходящая через его середину, т. е. серединный перпендикуляр (см. теорему 5.3 из §5 учебника 7—9 кл.).

4. Геометрическое место вершин прямых углов, стороны которых проходят через данные две точки, есть окружность (см. задачу 57 к §11 учебника 7—9 кл.).

5. Геометрическое место вершин углов с заданной градусной мерой, стороны которых проходят через две данные точки, а вершины лежат по одну сторону от прямой, соединяющей эти точки, есть дуга окружности с концами в этих точках (см. задачу 58 к §11 учебника 7—9 кл.).

6. Геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до двух данных точек постоянно и не равно 1, есть окружность (см. задачу 47 к §11 учебника 7—9 кл.).

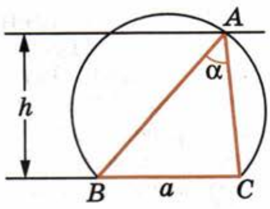


Рис. 207

Задача (39).

Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и высоте, опущенной из вершины этого угла.

Решение.

Пусть сторона BC искомого треугольника ABC равна a, противолежащий ей угол A равен α, а высота, проведенная из вершины этого угла, равна h. Допустим, задача решена (рис. 207). Тогда вершина A принадлежит геометрическому месту точек, из которых отрезок BC виден под углом α и которые расположены по одну сторону от прямой BC, т. е. дуге окружности с концами в точках B и C. Кроме того, она лежит на прямой, параллельной прямой BC и отстоящей от нее на расстоянии h. Поэтому вершина A является их точкой пересечения.

Для решения задачи достаточно построить прямую, параллельную AC и отстоящую от нее на h, и воспользоваться решением задачи 35 из п. 87. Задача может иметь два решения, одно решение или ни одного. Это зависит от числа точек пересечения прямой, параллельной прямой BC, с дугой окружности с концами в точках B и C.

91. Геометрические преобразования в задачах на построение

Наряду с методом геометрических мест задачи на построение могут решаться с помощью других методов, связанных с геометрическими преобразованиями. К ним относятся: метод подобия, метод симметрии, метод параллельного переноса и метод поворота. Приведем примеры задач на построение, решаемых с помощью этих методов.

Задача (45).

Впишите в данный треугольник квадрат, у которого две вершины лежат на одной из сторон треугольника, а две остальные — на двух других его сторонах.

Решение.

Пусть ABC — данный треугольник (рис. 208). Возьмем произвольную точку P на стороне AB и построим квадрат $PQRS$, сторона SR которого лежит на стороне AC данного треугольника. Далее находим точку пересечения Q_1 прямых AQ и BC и применяем гомотетию с центром в точке A и коэффициентом гомотетии $k = \frac{AQ_1}{AQ}$. При ней квадрат $PQRS$ переходит в искомый квадрат $P_1Q_1R_1S_1$, так как гомотетия является преобразованием подобия.

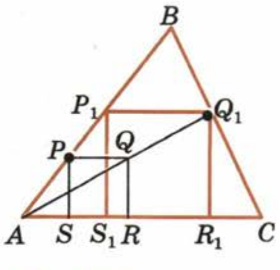


Рис. 208

Задача (49).

Даны пересекающиеся прямые и точка, не лежащая на них. Постройте отрезок с концами на данных прямых и серединой в данной точке.

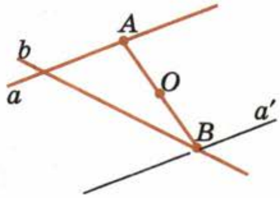


Рис. 209

Решение.

Пусть a и b — данные прямые и O — данная точка (рис. 209). Допустим, что задача решена. Тогда концы отрезка AB будут симметричными относительно точки O как середины отрезка. Поэтому при симметрии относительно этой точки отрезок переходит в себя и, значит, прямая a', в которую переходит при этой симметрии прямая a, проходит через конец B отрезка AB.

Таким образом, конец B искомого отрезка получается при пересечении прямой b с прямой a', симметричной прямой a относительно точки O. После этого достаточно провести прямую BO до пересечения с прямой a. Получим второй конец отрезка — точку A.

Задача (55).

Постройте квадрат, стороны которого проходят через четыре заданные точки A, B, C, D.

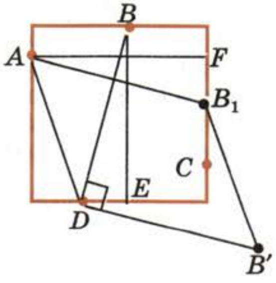


Рис. 210

Решение.

Допустим, что квадрат построен (рис. 210). Повернем отрезок DB около точки D на угол 90°. Получим отрезок DB'. А теперь перенесем его параллельно так, чтобы точка D совместилась с точкой A. При этом точка B' попадет в точку B_1 на стороне квадрата, которая проходит через точку C (или на продолжение этой стороны). Это следует из равенства прямоугольных треугольников BED и AFB_1 (у них гипотенузы BD и AB_1

равны по построению, а катеты BE и AF равны стороне квадрата). Построив точку B_1, проводим прямую CB_1, на которой лежит сторона квадрата. Далее проводим через точку A прямую, параллельную CB_1, и через точки B и D прямые, перпендикулярные этой прямой. Искомый квадрат построен.

92. Эллипс, гипербола, парабола

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек (называемых **фокусами**), постоянна.

Пусть F_1, F_2 — фокусы эллипса, расстояние между которыми равно $2c$, и M — любая точка эллипса. По определению $MF_1 + MF_2 = 2a$, где $a > c$ (так как сумма двух сторон треугольника, больше его третьей стороны). Составим уравнение эллипса, выбрав за начало декартовых координат x, y середину O отрезка F_1F_2 и направив ось x по лучу OF_1 (рис. 211). Фокусы эллипса имеют координаты $F_1(c;\ 0)$, $F_2(-c;\ 0)$, а любая его точка $M(x;\ y)$.

По формуле расстояния между двумя точками имеем:

$$MF_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad MF_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

И значит, координаты любой точки эллипса удовлетворяют уравнению

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

И наоборот: любая точка $M(x;\ y)$, координаты которой удовлетворяют этому уравнению, принадлежит эллипсу, так как сумма расстояний от нее до фокусов F_1 и F_2 согласно этому уравнению равна $2a$. Избавляясь от радикалов, уравнение эллипса можно привести к следующему *каноническому* виду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = a^2 - c^2$.

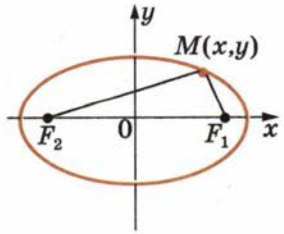


Рис. 211

Параметры a и b называются **полуосями** эллипса, а число $e = \frac{c}{a} < 1$ — **эксцентриситетом.** Так как уравнение эллипса содержит только квадраты координат, то, если точка $(x; y)$ принадлежит эллипсу, симметричные ей точки относительно осей координат $(-x; y)$, $(x; -y)$ и относительно начала координат $(-x; -y)$ тоже принадлежат эллипсу. Точки пересечения эллипса с его осями симметрии называются **вершинами** эллипса. У эллипса четыре вершины.

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний которых до двух данных точек (называемых **фокусами**), постоянен.

Пусть F_1, F_2 — фокусы гиперболы, расстояние между которыми равно $2c$, и M — любая ее точка. По определению

$$|MF_1 - MF_2| = 2a,$$

где $a < c$. Выбрав декартовы координаты так, как это было сделано при выводе уравнения эллипса (рис. 212), получим следующее уравнение гиперболы:

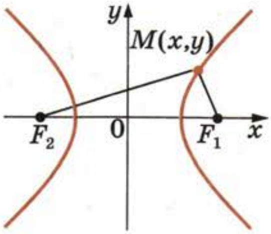


Рис. 212

$$\left|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

Гипербола, в отличие от эллипса, состоит из двух ветвей. Если $MF_1 < MF_2$, то получаем ветвь, расположенную в правой полуплоскости относительно оси y, а если $MF_1 > MF_2$ — ветвь расположенную в левой полуплоскости. Избавляясь от радикалов, уравнение гиперболы можно привести к *каноническому* виду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = c^2 - a^2$.

Параметры a и b называются **полуосями** гиперболы, а число $e = \frac{c}{a} > 1$ — **эксцентриситетом.** Как и в случае эллипса, оси координат являются осями симметрии гиперболы, а начало координат — центром симметрии. Точки пересечения гиперболы с осями симметрии называются **вершинами** гиперболы. У гиперболы две вершины. Левая часть уравнения гиперболы раскладывается на линейные множители $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)$.

Прямые $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ и $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ называются **асимптотами** гиперболы, к которым неограниченно приближаются ее ветви при $|x|$ и $|y|$, стремящихся к бесконечности.

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной прямой (называемой **директрисой**) и данной точки (называемой **фокусом**).

Пусть F — фокус параболы, а δ — ее директриса. Для вывода уравнения параболы выберем начало координат O в середине отрезка FD, который является перпендикуляром, опущенным из фокуса параболы на ее директрису, а ось x направим по лучу OF (рис. 213). Пусть длина отрезка FD равна p. Тогда точка F имеет координаты $\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$. Если $M(x;\ y)$ — точка лежащая на параболе, то

$$MF=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2},\ MD'=x+\frac{p}{2}.$$

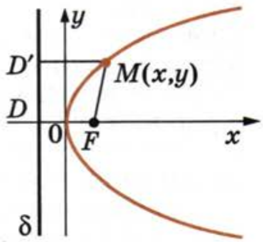


Рис. 213

И значит, координаты точки M параболы удовлетворяют уравнению

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}.$$

И наоборот: любая точка M плоскости, координаты которой удовлетворяют этому уравнению, принадлежит параболе, так как она равноудалена от точки $F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$ и прямой δ, задаваемой уравнением $x=-\frac{p}{2}$. Отсюда следует, что полученное уравнение действительно является уравнением параболы. Избавляясь от радикала, получим *каноническое* уравнение параболы $y^2=2px$.

Ось x является осью симметрии параболы, так как вместе с точкой $(x;\ y)$ ей принадлежит и точка $(x;\ -y)$. Точка пересечения параболы с ее осью симметрии называется **вершиной** параболы. Вершина параболы совпадает с началом координат. **Эксцентриситет** параболы считается равным 1.

Как видим, канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы, как и уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$, представляют собой уравнения второй степени относительно координат x и y. Поэтому они называются кривыми второго порядка. Этим кривым можно дать другие, эквивалентные приведенным выше, определения, используя понятие конической поверхности.

Коническим сечением называется линия пересечения полного конуса и плоскости, не проходящей через его вершину (рис. 214). Каждое коническое сечение, кроме окружности, представляет собой геометрическое место точек секущей плоскости, отношение расстояний которых от некоторой точки F и некоторой прямой δ постоянно. Точка F называется **фокусом** конического сечения, а прямая δ — **директрисой**. В зависимости от того, каково отношение e расстояний произвольной точки конического сечения от фокуса и директрисы, кривая называется **эллипсом** ($e < 1$), **параболой** ($e = 1$) и **гиперболой** ($e > 1$), а число e — **эксцентриситетом**.

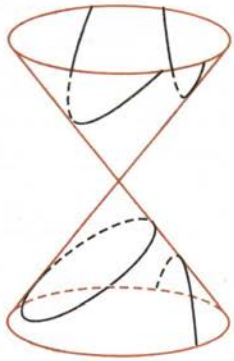


Рис. 214

Если секущая плоскость, не проходящая через вершину конической поверхности (см. рис. 214), пересекает все образующие какой-нибудь одной ее полы, то получается замкнутая кривая, представляющая собой эллипс (или окружность, если секущая плоскость перпендикулярна оси конуса). Если секущая плоскость параллельна какой-нибудь образующей конической поверхности и, значит, пересекает только одну ее полу, то получается незамкнутая кривая, представляющая собой параболу. И, наконец, если секущая плоскость, не проходящая через вершину конической поверхности, пересекает образующие обеих пол, то получается незамкнутая кривая, состоящая из двух ветвей и представляющая собой гиперболу.

Контрольные вопросы

1. Даны сторона и два угла треугольника. Как найти третий угол и две остальные стороны?
2. Даны две стороны треугольника и угол между ними. Как найти остальные два угла и третью сторону?
3. Даны две стороны треугольника и угол, противолежащий одной из них. Как найти остальные два угла и третью сторону?
4. Даны три стороны треугольника. Как найти его углы?
5. Сформулируйте и докажите свойство биссектрисы треугольника.
6. Выведите формулы для вычисления биссектрис треугольника по его сторонам.
7. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.
8. Выведите формулы для вычисления медиан треугольника по его сторонам.
9. Докажите формулу Герона для площади треугольника.
10. Выведите формулы для вычисления высот треугольника по его сторонам.
11. Выведите формулы для площади треугольника через его стороны и радиус описанной или вписанной окружности.
12. Сформулируйте теорему Чевы и теорему Менелая.
13. Докажите, что сумма противолежащих углов вписанного четырехугольника равна 180°.
14. Докажите, что если у выпуклого четырехугольника сумма противолежащих углов равна 180°, то около него можно описать окружность.
15. Докажите, что в описанном четырехугольнике суммы противолежащих сторон равны.
16. Докажите, что если у выпуклого четырехугольника суммы противолежащих сторон равны, то в него можно вписать окружность.
17. Какая дуга окружности называется соответствующей данному центральному углу в окружности?
18. Докажите, что угол, вершина которого лежит внутри круга, равен полусумме двух центральных углов, которым соответствуют дуги окружности, заключенные между сторонами данного угла и их продолжениями.
19. Докажите, что угол, вершина которого лежит вне круга, а стороны пересекают его окружность, равен полуразности двух центральных углов, которым соответствуют дуги окружности, заключенные между сторонами данного угла.
20. Сформулируйте и докажите теорему об угле между хордой и касательной.
21. Докажите свойство отрезков пересекающихся хорд окружности.

22. Сформулируйте и докажите свойство отрезков секущей и касательной к окружности.

23. Какие геометрические места точек используются обычно при решении задач на построение?

24. Какие существуют методы решения задач на построение с помощью геометрических преобразований?

25. Дайте определение эллипса (гиперболы, параболы) как геометрического места точек.

26. При каком геометрическом условии сечение полной конической поверхности является эллипсом (гиперболой, параболой)?

Задачи

Пункт 81

1. Даны сторона и два угла треугольника. Найдите третий угол и остальные две стороны, если: 1) $b = 12$, $\alpha = 36°$, $\beta = 25°$; 2) $c = 14$, $\alpha = 64°$, $\beta = 48°$.

2. Даны две стороны и угол между ними. Найдите остальные два угла и третью сторону, если: 1) $b = 14$, $c = 10$, $\alpha = 145°$; 2) $a = 32$, $c = 23$, $\beta = 152°$; 3) $a = 24$, $c = 18$, $\beta = 15°$.

3. В треугольнике заданы две стороны и угол, противолежащий одной из них. Найдите остальные углы и сторону треугольника, если: 1) $a = 34$, $b = 12$, $\alpha = 164°$; 2) $a = 2$, $b = 4$, $\alpha = 60°$; 3) $a = 6$, $b = 8$, $\alpha = 30°$.

4. Даны три стороны треугольника. Найдите его углы, если: 1) $a = 15$, $b = 24$, $c = 18$; 2) $a = 23$, $b = 17$, $c = 39$; 3) $a = 55$, $b = 21$, $c = 38$.

Пункт 82

5. Найдите биссектрису прямоугольного треугольника с катетами a и b, проведенную из вершины прямого угла.

6. Докажите, что если две медианы или две биссектрисы треугольника равны, то этот треугольник равнобедренный.

7. Докажите, что медиана треугольника не меньше его биссектрисы, проведенной из той же вершины.

8. Найдите выражения для сторон треугольника через его медианы.

9. Докажите, что если сумма квадратов диагоналей выпуклого четырехугольника равна сумме квадратов его сторон, то этот четырехугольник является параллелограммом.

Пункт 83

10. Найдите площадь треугольника с данными сторонами: 1) $\frac{25}{6}$, $\frac{29}{6}$, 6; 2) 13, $37\frac{12}{13}$, $47\frac{1}{13}$; 3) $2\frac{1}{12}$, $3\frac{44}{75}$, 1,83.

11. Найдите наименьшую высоту треугольника со сторонами, равными 17, 65, 80, и наибольшую высоту треугольника со сторонами, равными 13, $37\frac{12}{13}$, $47\frac{1}{13}$.

12. Основания трапеции равны 19 см и 31 см, а диагонали — 39 см и 41 см. Найдите высоту трапеции.

13. Основания трапеции равны 5 см и $2\frac{11}{12}$ см, а боковые стороны — $3\frac{44}{75}$ см и 1,83 см. Найдите высоту трапеции.

14. Найдите стороны треугольника ABC, если площади треугольников ABO, BCO и ACO, где O — центр вписанной окружности, равны 52 дм^2, 30 дм^2 и 74 дм^2.

15. Найдите площади треугольников ABO, BCO, ACO, где O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, у которого $AB = 28$ см, $BC = 15$ см, $AC = 41$ см.

16. Найдите радиусы описанной (R) и вписанной (r) окружностей для треугольника со сторонами, равными: 1) 35, 29, 8; 2) 4, 5, 7.

Пункт 84

17. Докажите с помощью теоремы Чевы, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

18. Докажите с помощью теоремы Чевы, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

19. Докажите с помощью теоремы Чевы, что высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.

20. Через каждую вершину треугольника проведена прямая, которая делит его периметр пополам. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

21. На медиане CM треугольника ABC дана точка P, через которую проведены прямые AP и BP, пересекающие стороны BC и AC треугольника в точках A' и B' соответственно. Докажите, что если $AA' = BB'$, то данный треугольник равнобедренный.

Пункт 85

22. Прямая, проходящая через середины диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$, пересекает его противолежащие стороны AB и CD в точках M и N. Докажите, что $AM : MB = CN : ND$.

23. Прямая пересекает стороны BC, AC и AB треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 лежат на одной прямой.

24. Прямая пересекает стороны AB, BC, CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ или их продолжения соответственно в точках P, Q, R, S. Докажите, что образовавшиеся отрезки удовлетворяют соотношению

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1.$$

Пункт 86

25. Докажите, что площадь четырехугольника со сторонами a, b, c, d, вписанного в окружность, вычисляется по формуле $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где p — полупериметр данного четырехугольника.

26. Найдите площадь четырехугольника, вписанного в окружность, стороны которого в порядке их обхода равны: 1) 1 см, 4 см, 8 см, 7 см; 2) 2 см, 5 см, 11 см, 10 см.

27. Докажите, что около равнобокой трапеции можно описать окружность. Верно ли обратное утверждение?

28. Равнобокая трапеция описана около окружности с радиусом 12 дм. Точка касания делит ее боковую сторону в отношении 9 : 4. Найдите площадь трапеции.

29. Около окружности радиуса r описана равнобокая трапеция с основаниями $2a$ и $2b$. Докажите, что $r^2 = ab$.

30. Найдите расстояние между сторонами ромба, диагонали которого равны d_1 и d_2.

Пункт 87

31. Две хорды пересекаются внутри окружности под углом 60°. Найдите градусные меры двух дуг, заключенных между сторонами этого угла и их продолжениями, если они относятся как 1 : 3.

32. Продолжения хорд пересекаются вне окружности под углом 60°. Найдите градусные меры двух дуг, заключенных между сторонами этого угла, если они относятся как 1 : 3.

33. Хорда делит окружность на части, отношение которых равно 3 : 7. Найдите углы, которые образует эта хорда с касательной к окружности, проведенной в ее конце.

34. Угол между касательными, проведенными из одной точки к окружности, равен 50°. Найдите градусные меры дуг этой окружности, заключенных между точками касания.

35. Дан треугольник ABC. Постройте геометрическое место точек, из которых отрезок AB виден под углом, равным углу A этого треугольника.

Пункт 88

36. Докажите, что если через точку S, расположенную внутри окружности, проведено больше двух хорд, то произведение отрезков любой из хорд одинаково для всех хорд.

37. Из точки C проведена касательная к окружности, отрезок CD которой с концом в точке касания D равен a, и секущая CB. Найдите длину секущей, если отношение внешней ее части к внутренней равно $m : n$.

38. Докажите, что если из точки S, расположенной вне данной окружности, проведено несколько секущих, то произведение отрезков любой из этих секущих с концом в точке S одинаково для всех секущих.

Пункт 90

39. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и высоте, опущенной из вершины этого угла.

40. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и сумме двух других сторон.

41. Превратите данный треугольник в равновеликий ему треугольник с тем же основанием и заданным углом при противолежащей вершине.

42. Постройте четырехугольник $ABCD$ по сторонам AB, BC, диагонали AC и углу между диагоналями, если известно, что он является вписанным в окружность.

43. Докажите, что геометрическое место точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых, состоит из биссектрис углов, получающихся при пересечении этих прямых.

44. Найдите геометрическое место точек, которые делят в отношении $m : n$ все хорды, имеющие своим общим концом данную точку окружности.

Пункт 91

45. Впишите в данный треугольник квадрат, у которого две вершины лежат на одной из сторон треугольника, а две остальные — на двух других его сторонах.

46. Впишите в данный равнобедренный треугольник прямоугольник со сторонами, относящимися как 1 : 3, две вершины которого лежат на основании треугольника, а две другие — на боковых сторонах.

47. Дан угол и внутри него точка A. Постройте окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через точку A.

48. Постройте треугольник по его двум углам и периметру.

49. Даны пересекающиеся прямые и точка, не лежащая на них. Постройте отрезок с концами на данных прямых и серединой в данной точке.

50. Постройте прямоугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в данной точке O, вершина A лежит на данной прямой a, а вершины B и D — на пересекающихся прямых b и d, не проходящих через точку O. Всегда ли задача имеет решение?

51. Даны попарно пересекающиеся прямые a, b, c. Постройте отрезок с серединой на прямой b, перпендикулярный ей, и концами на a и c. Всегда ли задача имеет решение?

52. Дан треугольник ABC и прямая d, проходящая через вершину C и пересекающая сторону AB. Найдите на прямой d точку D, из которой стороны AC и BC треугольника видны под равными углами.

53. Постройте трапецию по основаниям и диагоналям.

54. Постройте трапецию по одному углу, двум диагоналям и средней линии.

55. Постройте квадрат, стороны которого проходят через четыре заданные точки A, B, C, D.

56. Впишите в квадрат равносторонний треугольник с заданной вершиной на одной из сторон квадрата.

57. Постройте треугольник, стороны которого пропорциональны числам 3, 4 и 5, а вершины лежат на трех данных параллельных прямых.

Пункт 92

58. Что представляет собой фигура, задаваемая каноническим уравнением эллипса, если $a = b$?

59. Дана окружность $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$. Пусть плоскость xy равномерно сжимается относительно оси x так, что точка $(x; y)$ переходит в точку $(x'; y')$, где $x' = x$, а $y' = \frac{b}{a} \cdot y$, $b \neq a$. В какую фигуру переходит при этом данная окружность?

60. Выведите каноническое уравнение гиперболы, исходя из ее уравнения $\left|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right| = 2a$.

61. Докажите, что ветви гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ расположены вне прямоугольника $|x| < a$, $|y| < b$, но внутри вертикальных углов, образованных прямыми, содержащими его диагонали.

62. Составьте каноническое уравнение параболы, осью симметрии которой является ось y, считая, что расстояние от ее фокуса до директрисы равно p.

Ответы и указания к задачам

§ 1. **2.** Можно. **8.** Указание. Возьмите точку в другой плоскости и проведите через нее и данную прямую плоскость. Примените к этой плоскости аксиому параллельных. **12.** Четыре плоскости. **14.** Указание. Воспользуйтесь доказательством от противного.

§ 2. **2.** Нельзя. **5.** 1) 6 м; 2) 4,2 дм; 3) 6,2 см; 4) $\frac{a+b}{2}$. **6.** 1) 1 м; 2) 0,6 дм; 3) 2,1 см; 4) $\frac{|a-b|}{2}$. **7.** 1) 37,5 см; 2) 9,9 см; 3) 15 см; 4) $c\left(1+\frac{b}{a}\right)$. **8.** 1) 7 м; 2) 2 м; 3) $a + c - b$. **9.** Нельзя. **13.** 1) 5 см; 2) 3 см; 3) 8 см; 4) $\frac{bc}{a+c}$. **19.** Указание. См. задачу 16. **20.** Не всегда. Указание. См. задачу 16. **26.** Решения нет, если точка лежит в плоскости прямых. **32.** $A_1B_1 = a$. **35.** Указание. Сравните отношение отрезков двух произвольных прямых: $X_1X_2X_3$ и $Y_1Y_2Y_3$. **38.** Средней линией. **39.** Не может. **40.** Может. **41.** Указание. Отношение отрезков сохраняется. **42.** Указание. Проекция перпендикулярного диаметра проходит через середины хорд, параллельных проекции данного диаметра.

§ 3. **2.** Указание. См. задачу 1. **3.** 1) 6,5 см; 2) 15 см; 3) $\sqrt{a^2-b^2+d^2}$; 4) $\sqrt{a^2-c^2+2d^2}$. **7.** 2 м. **8.** $BD=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $CD=\sqrt{a^2+c^2}$. **14.** 2,6 м. **15.** $\approx 3{,}9$ м. **16.** 9 м. **17.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **19.** 1 м. **20.** 6,5 м. **21.** $\sqrt{a^2-\frac{b^2}{2}}$. **22.** Окружность. **23.** 6 см, 15 см. **24.** 1) 15 см, 41 см; 2) 4 см, 8 см. **25.** 9 см. **27.** 6 м. **28.** 5 м, 3 м. **29.** $\sqrt{a^2+c^2-b^2}$. **31.** $\sqrt{b^2-a^2}$. **32.** $\sqrt{b^2+c^2-a^2}$. **33.** 0,36 м или 0,44 м. **36.** 1) 4,25 см; 2) 6,75 см; 3) $\frac{a+b}{2}$. **37.** 1) 1,05 см; 2) 0,65 см; 3) $\frac{|a-b|}{2}$. **38.** 0,6 м. **39.** $\frac{am}{m+n}$ (m соответствует основанию, через которое проведена плоскость). **40.** $\frac{a}{2}$ **41.** Длина перпендикуляра $\sqrt{2a^2-b^2}$, длина стороны $\sqrt{b^2-a^2}$. **42.** $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$, $\sqrt{c^2-a^2}$, $\sqrt{c^2-b^2}$. **43.** $\sqrt{2}$ м.

44. $2\sqrt{2}$ м. **46.** 2,5 м. **47.** 6 м. **48.** 14 см. **49.** $\sqrt{a^2+b^2}$. **50.** $\sqrt{a^2-\frac{d^2}{8}}$. **51.** $\sqrt{2b^2-a^2}$. **52.** 2,5 м. **53.** $\sqrt{b^2+c^2-\frac{b^4}{a^2}}$. **55.** Указание. Прямые, перпендикулярные плоскости, параллельны. **56.** $\sqrt{23}$ м. **57.** 4 м. **59.** 1) 11 м; 2) 13 м; 3) 8 м; 4) 7 м; 5) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; 6) $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$. **60.** $\sqrt{a^2+b^2}$. **61.** 1,3 м. **62.** 1,7 м.

§ 4. **1.** На оси z. **3.** (1; 0; 0), (0; 2; 0), (0; 0; 3), (1; 2; 0), (1; 0; 3), (0; 2; 3). **4.** Расстояние от плоскости xy равно 3, от плоскости xz равно 2, от плоскости yz равно 1; расстояния от осей x, y, z соответственно равны $\sqrt{13}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{5}$; расстояние от начала координат равно $\sqrt{14}$. **6.** (2; 2; 2) и (−2; −2; −2). **7.** C (0; 0; 0). **8.** $x + 2y + 3z = 7$. **12.** B (0; −1; 3). **13.** 1) D (6; 2; −2); 2) D (0; −2; 2); 3) D (−1; 7; −2). **18.** (−1; −2; −3), (0; 1; −2), (−1; 0; 3). **20.** Указание. См. задачу 16. **24.** (−1; −2; 1). **25.** 1), 2), 4) Не существует; 3) существует. **30.** 90°. **31.** $\alpha + \beta$ или $|\alpha - \beta|$. **32.** 40° или 20°. **36.** 1) $\frac{a}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{a}{2}$; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **37.** 30°. **38.** $a\sqrt{6}$. **39.** $a\sqrt{2}$. **40.** $3a$. **41.** 30°. **44.** 30°. **45.** 13 м; $\sqrt{409}$. **46.** 1) $\cos\alpha=\frac{1}{14}$; 2) $\cos\alpha=\frac{2}{21}$. **47.** 3,36 м. **48.** 1) $\frac{3a^2}{8}$; 2) $\frac{a^2\sqrt{6}}{8}$; 3) $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. **49.** 1) $\frac{30}{7}$ м² или 48 м²; 2) 2,5 м² или $\frac{128}{7}$ м². **51.** D (−2; 3; 0). **52.** D (2; 1; −2). **53.** $n=\frac{4}{3}$, $m=\frac{3}{2}$. **55.** 1) $n=\frac{1}{3}$; 2) $n=-1$; 3) $n=2$; 4) $n=4$. **56.** $c=1$. **57.** $\sqrt{|\bar a|^2+|\bar b|^2+|\bar c|^2+|\bar a||\bar b|}$. **58.** 1) $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\varphi=90°$. **60.** $\cos C=\sqrt{\frac{2}{15}}$. **62.** $\cos\varphi=\cos\alpha\cos\beta$. **63.** 60°. **64.** $\cos\varphi=\frac{\cos\beta-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$. **65.** 1) $3x-y-z+6=0$; 2) $3x+6y-2z-5=0$; 3) $x-5y+8z-63=0$. **66.** 1) $2\sqrt{11}$; 2) $\frac{55}{7}$; 3) $\frac{21}{\sqrt{10}}$. **67.** $\left|\frac{d}{a}\right|, \left|\frac{d}{b}\right|, \left|\frac{d}{c}\right|$. **69.** Указание. Сложите почленно первое и третье уравнения.

70. 1) (2; 1; −2); 2) (4,5; 1,5; 0,5); 3) (−2; −7; −28); 4) $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. **71.** 1) $c = 0$, $d \neq 0$; 2) $c = d = 0$; 3) $b = 0$.

§ 5. **1.** 2) 60°. **4.** $\cos\varphi = \frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\cos\beta = \frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\gamma}{2}}$. **6.** $n\ (n - 3)$. **9.** Указание. Воспользуйтесь теоремой 3.3. **10.** 144 см². **11.** 7,5 см. **12.** 12 см. **13.** $a\sqrt{5}$, $2a$, $2a^2$, $a^2\sqrt{3}$. **14.** $3a^2$. **15.** $\cos x = \sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **16.** $\frac{7a^2}{8\cos\alpha}$. **17.** 22 см. **18.** $Q\sqrt{2}$. **19.** 12. **20.** 2 м. **21.** 4 м. **23.** 45 см². **24.** 1) $3ab + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; 2) $4ab + 2a^2$; 3) $6ab + 3a^2\sqrt{3}$. **25.** $3l^2\sqrt{3}$. **26.** 12 м². **29.** 188 м². **30.** ≈ 262 см². **31.** 10 см². **32.** $2a$, $a\sqrt{2}$. **33.** 13 м, 9 м. **34.** 2 м², 3 м². **35.** 1) 3; 2) 7; 3) 11. **36.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **37.** 2 м². **38.** 1464 см². **39.** $2\sqrt{M^2 + 2Qh^2}$. **40.** $\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}$, $\sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}}$, $\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$. **41.** 3 см. **42.** 12 см. **43.** $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha$. **44.** $\frac{a\operatorname{tg}\beta}{2}$. **45.** $2\sqrt{3}$ см. **46.** 5 см, 6 см. **47.** 26 м². **48.** 540 см². **49.** 10 м². **53.** $\frac{35}{6}$ см, $\frac{20}{3}$ см, $\frac{15}{2}$ см. **55.** 11 м. **56.** $\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}}$. **57.** 9 см. **58.** $\cos x = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **59.** 1) $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$; 2) $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$; 3) $\sqrt{b^2 - a^2}$. **60.** 1) $\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}$; 2) $\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$; 3) $\sqrt{h^2 + \frac{3a^2}{4}}$. **61.** 1) $\frac{a\sqrt{3}}{4}(a^2 + \sqrt{a^2 + 12h^2})$; 2) $a(a + \sqrt{a^2 + 4h^2})$; 3) $\frac{3a}{2}(a\sqrt{3} + \sqrt{3a^2 + 4h^2})$. **62.** $2r(r\sqrt{3} + \sqrt{3a^2 - r^2})$. **63.** 1,8 м, 4 м. **64.** $3a^2$. **65.** $\frac{Q}{\cos\varphi}$. **66.** $\cos\varphi = \frac{Q}{S}$. **67.** 16 см и 6 см или 12 см и 8 см. **68.** $\sqrt{2}$ см. **70.** 9 см. **71.** 1 дм. **72.** 6 см. **73.** 2 см. **74.** $\frac{a^2 - b^2}{4}$.

75. $20\sqrt{2}$. **76.** 24 м^2, 30°. **77.** 168 м^2. **78.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2+(a+b)\times$ $\times\sqrt{12h^2+(a-b)^2})$; 2) $a^2+b^2+(a+b)\sqrt{4h^2+(a-b)^2}$; 3) $\frac{2}{3}(\sqrt{3}\,(a^2+b^2)+(a+b)\sqrt{4h^2+3(a-b)^2})$. **82.** 109°28′. Указание. Докажите сначала, что в каждой вершине октаэдра сходятся две пары перпендикулярных ребер. Затем примените формулу задачи 4.

§ 6. **1.** 5 м. **3.** 36 см^2. **4.** 3 дм. **5.** 3 дм. **6.** $\operatorname{tg} x=\frac{1}{2}$. **8.** 10 м. **9.** 5 м. **10.** $\frac{l}{2}$. **11.** R^2. **12.** $2R^2\sin\alpha$. **13.** 500. **14.** $\frac{R^2\operatorname{tg}\alpha}{\cos\varphi}\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\varphi}$, если $\alpha+\varphi<90°$. **16.** $\frac{H}{\sqrt{2}}$. **17.** $\frac{3l}{4}$. **18.** 3 см. **19.** 5 м. **20.** $R-r$. **21.** a, $2a$. **22.** 30 дм^2. **23.** 9 дм^2. **24.** $\frac{1}{4}(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2$. **26.** $\frac{HR\sqrt{2}}{H+R\sqrt{2}}$. **27.** $\frac{HR\sqrt{3}}{H+R\sqrt{3}}$. **29.** 16π м^2. **31.** $\frac{\pi R^2}{4}$. **32.** πR. **33.** ≈ 785 км. **34.** 12 см. **35.** 12 см. **36.** 5 см. **37.** $\frac{\pi R^2}{4}$. **40.** 3 см. **41.** 8 см. **42.** $\sqrt{r_1^2+r_2^2}$. **43.** $R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; $\frac{R}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$; $\frac{2R}{\sin\alpha}$. **45.** 4π м. **46.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **49.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **50.** $r=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}$, $R=\frac{a}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}$. **51.** $2R\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$. **52.** 1) $2\sqrt{R^2-\frac{a^2}{3}}$; 2) $2\sqrt{R^2-\frac{a^2}{2}}$; 3) $2\sqrt{R^2-a^2}$. **53.** $\frac{a\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}$. **54.** $R=\frac{a}{2\sin 2\alpha\cdot\sin\frac{180°}{n}}$.

§ 7. **1.** 6 см. **2.** ≈ 8,4 г/см^3. **4.** 25 см. **5.** 1,8 г/см^3. **6.** ≈ 2,29 м. **7.** 30 м. **8.** Вдвое. **9.** ≈ 192,72 кг. **12.** 60 см^3. **13.** 3 м^3. **14.** $\sqrt{\frac{MNQ}{2}}$. **15.** $\sqrt{2}$ м^3. **16.** $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$. **17.** $2\sqrt{\sin 3\alpha\sin^3\alpha}$. **18.** $abc\times$ $\times\sqrt{-\cos 2\alpha}$. **19.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2b$; 2) a^2b; 3) $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2b$. **20.** 0,5 г/см^3.

21. 3 см^3. **22.** $\frac{a^3}{8}$. **23.** 6 м^3. **25.** 3060 м^3. **26.** 6048 м^3/ч. **27.** 35 200 м^3. **28.** 48 см^3. **29.** 12 см^3. **30.** 2 см. **31.** $\frac{1}{8}ac \times \times\sqrt{12a^2-3c^2}$. **32.** $\frac{h^3 \sin\gamma}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$. **33.** 1) $\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}$; 2) $\frac{a^2}{6}\sqrt{4b^2-2a^2}$; 3) $\frac{a^2}{2}\sqrt{3(b^2-a^2)}$. **34.** $\frac{3a^3}{4}$. Указание. Высота пирамиды равна радиусу окружности, вписанной в основание. **35.** $\frac{1}{6}b^3$. **36.** $\frac{a^3}{12\sqrt{2}}$. **37.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **38.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. Указание. Разбейте октаэдр на две правильные четырехугольные пирамиды. **39.** 360 м^3. **40.** 48 см^3. Указание. Основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, описанной около основания пирамиды. **41.** $\sqrt{11}$ см^3. **42.** $\frac{4}{3}l^3\cos\alpha\cos\beta\sqrt{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}$. **43.** $\frac{2}{3}R^3\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin(\alpha+\beta)\,\mathrm{tg}\,\gamma$. **45.** $\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}}$. **46.** $\frac{1}{6}(a^3-b^3)\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Указание. Воспользуйтесь формулой задачи 44. **47.** $\frac{1}{24}(a^3-b^3)\,\mathrm{tg}\,\alpha$. **49.** $\frac{h}{\sqrt[3]{2}}$.

§ 8. **1.** ≈ 0,75 мм. **2.** ≈ 4500 л. **3.** В n раз; в $\sqrt{n}$ раз. **4.** 4 : 1. **5.** $\frac{3}{4}\pi a^3$. **6.** ≈ 61 кг. **7.** ≈ 6,3 м^3. **8.** 9π м^3. Указание. Высота конуса равна радиусу его основания. **9.** $\frac{c^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 l^2-c^2}$. **10.** $\frac{1}{3}\pi l^3\sin\alpha\cos^2\alpha$. **11.** ≈ 1,6 т. **12.** ≈ 0,35 м. **13.** $\frac{\pi a^3}{4}$. **14.** $\frac{\pi a^2 b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$. **16.** ≈ 2%. **17.** $\frac{\pi^2}{3}\left|R^3-r^3\right|$. **18.** $\frac{\pi^2}{3}\left|R^3-r^3\right|$. **19.** 14 см. **20.** $1-\left(\frac{r}{R}\right)^3$, если $r < R$. **21.** ≈ 14 см. **22.** ≈ 39 см. **23.** 167. **24.** $33\frac{1}{3}\%$. Указание. Диаметр шара равен диаметру цилиндра. **25.** ≈ 2148 см^3. **26.** $\frac{V}{\pi R^2}-\frac{2}{3}R$. **27.** 45π см^3, 243π см^3. **28.** 0,028. **29.** 5 : 16. **30.** 3528π см^3.

У к а з а н и е. Разбейте указанную часть шара на цилиндр и два сегмента. **31.** $112{,}5\pi$ дм^3 или 450π дм^3. **32.** $\frac{1}{3}\pi R^3(2-\sqrt{3})$. У к а з а н и е. Тело является шаровым сектором. **33.** $\sqrt{m^3}:\sqrt{n^3}$. **34.** Большая поверхность равновелика сумме двух других. **35.** У к а з а н и е. Выразите обе поверхности через сторону квадрата. **36.** 180π см^2. **37.** 512π см^2. **38.** $\approx 40{,}4$ м^2. **39.** ≈ 116 м^2. **40.** 75 см. **41.** $\pi m + 2Q$. У к а з а н и е. По площади основания найдите его радиус. **42.** $\approx 25{,}3$ м^3. **43.** $\approx 33{,}98$ м^2. **44.** $\frac{S}{\cos\alpha}$. У к а з а н и е. По площади основания найдите его радиус. **45.** 2 : 3. **46.** Выразите поверхность шара и конуса через длину образующей конуса. **47.** 30°. **48.** 1 м. У к а з а н и е. Длина окружности основания равна длине дуги сектора. **49.** $\approx 1{,}04$ м^2. **50.** $\approx 4{,}3$ кг.

§ 9. **1.** 1) $\gamma = 119°$, $a \approx 16{,}7$, $c \approx 24{,}8$; 2) $\gamma = 68°$, $a \approx 13{,}6$, $b \approx 11{,}2$. **2.** 1) $\beta \approx 21°$, $\gamma \approx 15°$, $a \approx 22{,}9$; 2) $\alpha \approx 16°$, $\gamma \approx 12°$, $b \approx 53{,}4$; 3) $\alpha \approx 130°$, $\gamma \approx 35°$, $b \approx 8{,}09$. **3.** 1) $c \approx 22{,}3$, $\beta \approx 6°$, $\gamma \approx 10°$; 2) не имеет решения; 3) $c \approx 11{,}4$, $b \approx 42°$, $\gamma \approx 108°$ или $c \approx 2{,}49$, $b \approx 138°$, $\gamma \approx 12°$. **4.** 1) $\alpha \approx 39°$, $\beta \approx 93°$, $\gamma \approx 48°$; 2) $\alpha \approx 15°$, $\beta \approx 11°$, $\gamma \approx 154°$; 3) $\alpha \approx 136°$, $\beta \approx 15°$, $\gamma \approx 29°$. **5.** $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. **6.** У к а з а н и е. Воспользуйтесь формулами для вычисления медиан и биссектрис треугольника. **7.** См. указание к задаче 6. **8.** $a = \frac{2}{3}\sqrt{2\left(m_b^2 + m_c^2\right) - m_a^2}$,

$b = \frac{2}{3}\sqrt{2\left(m_a^2 + m_c^2\right) - m_b^2}$, $c = \frac{2}{3}\sqrt{2\left(m_a^2 + m_b^2\right) - m_c^2}$.

9. У к а з а н и е. Докажите сначала, что четырехугольник, вершинами которого являются середины двух диагоналей данного четырехугольника и середины двух его противолежащих сторон, есть параллелограмм. Примените затем трижды теорему 9.2 и найдите квадрат длины отрезка, соединяющего середины диагоналей исходного четырехугольника. **10.** 1) 10; 2) $\frac{2520}{13}$; 3) 1,4. **11.** 7,2; $\frac{5040}{169}$. **12.** 31,2 см. У к а з а н и е. Постройте сначала треугольник, две стороны которого равны диагоналям трапеции, а третья — сумме ее оснований. **13.** 1,344 см. У к а з а н и е. Постройте сначала треугольник, две стороны которого равны боковым сторонам трапеции, а третья — разности оснований. **14.** $AB = 26$ дм, $BC = 15$ дм, $AC = 37$ дм.

15. $S_{ABO} = 42$ см^2, $S_{BCO} = 22{,}5$ см^2, $S_{ACO} = 61{,}5$ см^2. **16.** 1) $R = \frac{145}{6}$, $r = \frac{7}{3}$; 2) $R = \frac{35}{4\sqrt{6}}$, $r = \frac{\sqrt{6}}{2}$. **18.** Указание. Воспользуйтесь теоремой 9.1. **20.** Указание. Докажите сначала, что стороны треугольника a, b, c разбиваются точками деления на отрезки, равные $p - a$, $p - b$, $p - c$, где p — полупериметр данного треугольника. **21.** Указание. Докажите сначала с помощью теоремы Чевы, что четырехугольник $AB'A'B$ является равнобокой трапецией. **22.** Указание. Примените теорему Менелая к $\triangle ABO$ и $\triangle CDO$, где O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. **23.** Указание. Примените обратное утверждение теоремы Менелая к треугольнику, образованному средними линиями данного треугольника и точками, являющимися серединами отрезков AA_1, BB_1, CC_1. **24.** Указание. Примените теорему Менелая к треугольникам, на которые делит данный четырехугольник одна из его диагоналей, и к данной прямой. **25.** Указание. Площадь четырехугольника равна сумме площадей треугольников, на которые он разбивается одной из своих диагоналей. Углы, прилежащие к ней, дополняют друг друга до 180°. Поэтому площадь четырехугольника можно выразить через его стороны и синус одного из этих углов. А косинус этого угла также можно выразить через стороны четырехугольника. Так как $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то отсюда после преобразований, аналогичных тем, которые проводились при выводе формулы Герона, и получается требуемый результат. **26.** 1) 18 дм^2; 2) 36 см^2. Указание. Проще всего воспользоваться формулой из предыдущей задачи. Однако, если сначала перейти от данного четырехугольника к равновеликому ему с помощью осевой симметрии, то его площадь можно найти и непосредственно. При этом становится очевидным само существование вписанных четырехугольников с заданными сторонами. **27.** Да, вписанная в окружность трапеция является равнобокой. **28.** 312 дм^2. **30.** $\frac{d_1 d_2}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}$. **31.** 30° и 90°. **32.** 60° и 120°. **33.** 54° и 126°. **34.** 130° и 230°. **36.** Указание. Достаточно заметить, что произведение отрезков любой из данных хорд равно произведению отрезков диаметра окружности, проходящего через точку S. **37.** $a\sqrt{1 + \frac{n}{m}}$. **38.** Указание. Достаточно заметить, что произведение отрезков любой из данных секущих равно квадрату отрезка касательной, проведенной из точки S к окружности. **40.** Указание. Постройте сначала вспомогательный треугольник, который получается из искомого, если одну из его боковых сторон продолжить на отрезок, равный другой боковой стороне. Угол при верищне этого треугольника, противолежащий основанию, равен половине данного угла. **41.** Указание. Воспользуйтесь решением задачи 39. **42.** Указание. Постройте сначала окружность, описанную около треугольника ABC. **43.** Указание. Прямая, содержащая биссектрису угла, является его осью симметрии. **44.** Указание. Окружность, касающаяся данной окружности в данной точке. **46.** Указание. Для построения искомого прямоугольника воспользуйтесь гомотетией — аналогично тому, как это сделано в решении предыдущей задачи, в отличие от которой данная задача имеет два решения. **47.** Указание. Постройте сначала какую-нибудь окружность, касающуюся сторон данного угла, а затем воспользуйтесь гомотетией с центром в данной вершине угла. **48.** Указание. Постройте сначала какой-нибудь треугольник, два угла которого равны данным углам, а затем воспользуйтесь преобразованием подобия с коэффициентом подобия, равным отношению данного периметра и периметра вспомогательного треугольника (для чего последний предварительно надо «развернуть» на прямую, содержащую одну из его сторон). **50.** Указание. Постройте сначала вершины B и D искомого прямоугольника, воспользовавшись решением предыдущей задачи. Задача имеет решение только в том случае, когда прямая a пересекает окружность с диаметром BD или касается ее. **51.** Указание. Воспользуйтесь симметрией относительно прямой b. Задача не имеет решения, если прямая a', симметричная прямой a относительно прямой b, параллельна прямой c. **52.** Указание. Воспользуйтесь симметрией относительно прямой d. Искомая точка D является точкой пересечения прямых d и AB', где B' — точка, симметричная точке B относительно прямой d. **53.** Указание. Воспользовавшись параллельным переносом, сведите данную задачу к построению треугольника со сторонами, равными диагоналям трапеции, и основанием равным сумме оснований трапеции. **54.** См. указание к предыдущей задаче. **56.** Указание. Поверните квадрат на угол $60°$ около заданной вершины равностороннего треугольника. **57.** Указание. Треугольник, стороны которого пропорциональны числам 3, 4, 5, — прямоугольный. Повернув его на $90°$ вокруг вершины прямого угла, можно один из его катетов перевести на прямую, содержащую другой катет, что позволяет построить последний, воспользовавшись тем, что его отношение к первому катету равно $\frac{3}{4}$ (или $\frac{4}{3}$). **58.** Уравнение окружности с центром в начале координат. **59.** Эллипс. **60.** У к а з а н и е. Рассмотрите отдельно случаи $MF_1 > MF_2$ и $MF_2 > MF_1$. **61.** У к а з а н и е. Внутри указанного прямоугольника нет точек гиперболы, так как $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1$. Нет их и в оставшихся частях вертикальных углов, содержащих внутри ось y, так как $\frac{b}{a} < \left|\frac{y}{x}\right|$.

62. $x^2 = 2py$.

Предметный указатель

Р

С

Т

У

Ф

Ц

Ш

Э

Содержание

10 КЛАСС

11 КЛАСС

Учебное издание

***Погорелов** Алексей Васильевич*

ГЕОМЕТРИЯ

10—11 классы

Учебник для общеобразовательных организаций

Базовый и профильный уровни

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*, спец. редактор *А. М. Зубков*,
редакторы *Т. Ю. Акимова, Т. Г. Войлокова, И. В. Рекман*,
младший редактор *Н. В. Сидельковская*,
художники *В. Е. Киселев, И. В. Горустович, Т. В. Делягина, Е. В. Анненкова*,
художественный редактор *О. П. Богомолова*,
компьютерная верстка *Н. В. Кондратьевой, Л. М. Абрамовой*,
корректоры *О. В. Крупенко, О. Н. Леонова, Н. И. Новикова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 25.06.13. Формат $70\times90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 9,64 + 0,53 форз. Тираж 30 000 экз. Заказ 1542.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в филиале «Тверской полиграфический комбинат детской литературы». ОАО «Издательство «Высшая школа». 170040, г. Тверь, проспект 50 лет Октября, д. 46. Тел.: +7(4822) 44-85-98. Факс: +7(4822) 44-61-51.